



IX. Vollständigkeit und Konsequenzen

Wir haben letzte Woche den Kalkül des Natürlichen Schließens für die Prädikatenlogik kennengelernt und gesehen, dass dieser korrekt ist. Wir haben auch bereits erwähnt, dass er in einem noch zu präzisierenden Sinn *vollständig* ist. Dazu wiederholen wir den Korrektheitssatz gleich in einer minimal verallgemeinerten Form.

Satz 9.1 (Korrektheitssatz). Sei $\Gamma \subseteq F_\Sigma(X)$, $A \in F_\Sigma(X)$ und $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ eine beliebige (endliche) Teilmenge, sodass $\Gamma_0 \vdash A$ herleitbar ist. Dann gilt $\Gamma \models A$.

Beweis. Dies folgt sofort aus Satz 8.6, da mit $\Gamma_0 \models A$ auch für jede Obermenge $\Gamma' \supseteq \Gamma_0$ stets $\Gamma' \models A$ gilt. \square

Man erinnere sich dabei daran, dass $\Gamma \models A$ nach Definition bedeutet, dass in jedem Modell \mathcal{M} und unter jeder Variablenbelegung $\rho: X \rightarrow M$ die Gültigkeit aller Formeln $C \in \Gamma$ unter ρ die Gültigkeit von A unter ρ , also $\llbracket A \rrbracket \rho = w$, zur Folge hat.

1 Vollständigkeit

Jetzt beschäftigen wir uns mit der Umkehrung dieses Satzes. Wie in der Aussagenlogik (siehe Satz 3.8) ist das Natürliche Schließen auch für die Prädikatenlogik vollständig. Wir werden aber nur die Grundidee des Beweises betrachten und die technischen Details überspringen.

Diesmal zeigen wir den Vollständigkeitssatz gleich in der allgemeinen Fassung für unendliche Prämissenmengen, also das prädikatenlogische Analogon zu Korollar 4.3. Der Beweis geht per Widerspruch und ist sehr ähnlich wie bei der Aussagenlogik: Kann man für keine (endliche) Teilmenge $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ die Sequenz $\Gamma_0 \vdash A$ herleiten, so will man zeigen, dass dann auch $\Gamma \models A$ nicht gilt. Wie man das zeigt, kann man sich wieder am besten durch ein Diagramm veranschaulichen

$$\begin{array}{ccc} \forall \Gamma_0 \subseteq \Gamma. \Gamma_0 \not\vdash A & & \Gamma \not\vdash A \\ \updownarrow & & \updownarrow \\ \Gamma, \neg A \text{ konsistent} & \implies & \Gamma, \neg A \text{ erfüllbar} \end{array}$$

wobei die Begriffe “konsistent” und “erfüllbar” wie folgt definiert sind:

Definition 9.2. Sei Σ eine Signatur und $\Delta \subseteq F_\Sigma(X)$ beliebig.

- Dann heißt die Formelmengemenge Δ **konsistent** wenn es *keine* Teilmenge $\Delta_0 \subseteq \Delta$ so gibt, dass $\Delta_0 \vdash \perp$ herleitbar ist.
- Ferner heißt Δ **erfüllbar**, wenn es ein Σ -Modell \mathcal{M} und eine Belegung $\rho: X \rightarrow M$ so gibt, dass für alle $D \in \Delta$ die Beziehung $\llbracket D \rrbracket \rho = w$ gilt. (Statt “erfüllbar” sagt man manchmal auch “hat ein Modell”.)

Die beiden “vertikalen” Äquivalenzen sind sehr leicht und gehen genauso wie im aussagenlogischen Fall.

Lemma 9.3. Eine Formelmengemenge $\Gamma \cup \{\neg A\} \subseteq F_\Sigma(X)$ ist genau dann konsistent, wenn man für keine Teilmenge $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ die Sequenz $\Gamma_0 \vdash A$ herleiten kann.

Lemma 9.4. Eine Formelmengemenge $\Gamma \cup \{\neg A\} \subseteq F_\Sigma(X)$ ist genau dann erfüllbar, wenn $\Gamma \models A$ nicht gilt.

1.1 Existenz von Modellen

Der technisch komplizierte Teil des Beweises steckt, wie bei der Aussagenlogik auch, in der Implikation, dass konsistente Formelmengen erfüllbar sind, also ein Modell haben. Ähnlich wie in der Aussagenlogik konstruiert man sich dazu ein *Termmmodell* aus der Syntax, also der Sprache die durch die Signatur Σ gegeben ist. Das Hauptproblem ist, dass man sich bei der dem Modell zugrundeliegenden Menge nicht auf $T_\Sigma(X)$ beschränken kann, da man auch “Zeugen” für alle Existenzaussagen $\exists x.A$ braucht. Die Details der Konstruktion sind recht verwickelt und wir wollen hier nicht genauer auf sie eingehen, sondern wir geben nur das zentrale Ergebnis:

Satz 9.5. *Jede konsistente Formelmenge $\Delta \subseteq F_\Sigma(X)$ ist erfüllbar.*

1.2 Vollständigkeit

Zusammen mit den Lemmas 9.3 und 9.4 sowie Satz 9.1 erhalten wir als Konsequenz aus diesem Satz sofort den Vollständigkeitssatz der Prädikatenlogik, der besagt, dass man mit dem Kalkül des Natürlichen Schließens genau das beweisen kann, was in *allen* Modellen gilt.

Satz 9.6 (Vollständigkeitssatz). *Sei $\Gamma \subseteq F_\Sigma(X)$ eine Menge von Formeln und $A \in F_\Sigma(X)$. Dann gilt genau dann $\Gamma \models A$, wenn es eine (notwendigerweise endliche) Teilmenge $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ mit $\Gamma_0 \vdash A$ gibt.*

2 Löwenheim-Skolem

Wenn man sich die Konstruktion des Modells aus Satz 9.5 genauer ansieht, so erhält man folgende Verschärfung:

Satz 9.7 (Löwenheim-Skolem). *Sei $\Sigma = (\Omega, \mathcal{R}, \alpha)$ eine Signatur, wobei Ω und \mathcal{R} höchstens abzählbar sind, X eine abzählbare Variablenmenge und $\Delta \subseteq F_\Sigma(X)$ eine konsistente Formelmenge. Dann hat Δ ein höchstens abzählbares Modell.*

Dieser Satz sagt etwas über die Grenzen der Ausdrucksstärke der Prädikatenlogik¹ aus: Wir können in dieser Sprache keine großen Kardinalitäten erzwingen.

Das ist vielleicht zunächst nicht sehr verwunderlich, hat aber auch paradox anmutende Konsequenzen: Die axiomatische Mengenlehre — die Sprache, in der man die übliche Mathematik formalisieren kann — ist eine Sprache erster Stufe mit nur einem Relationssymbol \in und der Gleichheit $=$. Wenn sie also konsistent ist, wovon wir alle ausgehen, so hat sie ein abzählbares Modell. Innerhalb kann man aber die Existenz von sehr vielen nicht abzählbaren Mengen, wie z.B. $\mathfrak{P}(\mathbb{N})$, beweisen, die aber alle in diesem abzählbaren Modell enthalten sind.

3 Kompaktheitssatz

Als eine Konsequenz aus dem Vollständigkeitssatz erhält man mit der folgenden Variante von Lemma 9.4 sofort den Kompaktheitssatz für die Prädikatenlogik (vgl. Satz 4.2).

Lemma 9.8. *Eine Formelmenge $\Gamma \subseteq F_\Sigma(X)$ ist genau dann unerfüllbar, wenn $\Gamma \models \perp$ gilt.*

Satz 9.9 (Kompaktheitssatz). *Eine Menge $\Gamma \subseteq F_\Sigma(X)$ von Formeln ist genau dann erfüllbar, wenn jede endliche Teilmenge $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ erfüllbar ist.*

Beweis. Dass mit Γ auch jede endliche Teilmenge $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ erfüllbar ist, ist klar.

Für die andere Richtung nehmen wir nun an, dass Γ nicht erfüllbar ist. Dann gilt nach Lemma 9.8 $\Gamma \models \perp$ und aus der Vollständigkeit erhält man eine endliche Teilmenge $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ mit $\Gamma_0 \vdash \perp$. Mit dem Korrektheitssatz schließt man nun $\Gamma_0 \models \perp$ und somit, dass Γ_0 unerfüllbar ist. \square

Der Kompaktheitssatz erlaubt es uns, noch viel genauer zu untersuchen, was man in der Prädikatenlogik ausdrücken kann und was nicht. Wir betrachten einige Beispiele dafür.

¹Genauer gesagt der Prädikatenlogik **erster Stufe**. Hierbei bedeutet *erster Stufe*, dass man nur über Elemente der Grundmenge quantifizieren darf, nicht aber über Teilmengen.

3.1 Endlichkeit

Als erstes werden wir sehen, dass man Endlichkeit nicht axiomatisieren kann. In der Übung haben wir bereits gesehen, dass wir aber sehr wohl ausdrücken können, dass das Modell einelementig ist; z.B. mit folgender Formel:

$$\forall x \forall y. x = y$$

Ähnlich kann man auch sagen, dass es genau zwei Elemente im Modell gibt

$$\exists x. \exists y. \neg x = y \wedge (\forall z. z = x \vee z = y)$$

und man überlegt sich schnell, dass man für jedes $n \in \mathbb{N}$ ausdrücken kann, dass es genau n Elemente gibt. Verknüpft man k dieser Formeln mit \wedge , so drückt man aus, dass es entweder genau n_1, n_2, \dots oder n_k Elemente gibt. Man kann aber nicht ausdrücken, dass es nur endlich (aber beliebig) viele Elemente gibt.

Satz 9.10. Sei Γ eine Formelmengung, die beliebig große endliche Modelle hat, d.h. für alle $n \in \mathbb{N}$ gibt es ein $n' \in \mathbb{N}$ mit $n' > n$ und ein Modell \mathcal{M} für Γ mit der Mächtigkeit $|M| = n'$. Dann hat Γ ein unendliches Modell.

Beweis. Wir betrachten die Formeln

$$A_n := \exists x_1 \exists x_2 \exists x_3 \cdots \exists x_n. \neg x_1 = x_2 \wedge \neg x_1 = x_3 \wedge \cdots \wedge \neg x_1 = x_n \wedge \cdots \wedge \neg x_{n-1} = x_n,$$

die aussagen, dass das Modell mindestens n Elemente hat. Jede endliche Teilmenge von

$$\Gamma' := \Gamma \cup \{A_n \mid n \in \mathbb{N}\}$$

ist nach Voraussetzung erfüllbar und somit ist Γ' nach dem Kompaktheitssatz ebenfalls erfüllbar. Ein Modell für Γ' muss aber unendlich sein und ist natürlich immernoch ein Modell für Γ . \square

3.2 Peano-Arithmetik

Die natürlichen Zahlen kann man wie folgt axiomatisieren. Man hat die Funktionssymbole $\Omega = \{0, s, +, \cdot\}$, wobei s für die einstellige Nachfolgeroperation steht, und (außer der Gleichheit) keine Relationssymbole. Dazu hat man die folgenden Axiome, die die definierenden Eigenschaften von s , $+$ und \cdot beschreiben:

- $\forall x. \neg s(x) = 0$
- $\forall x \forall y. s(x) = s(y) \rightarrow x = y$
- $\forall x. x + 0 = x$
- $\forall x \forall y. x + s(y) = s(x + y)$
- $\forall x. x \cdot 0 = 0$
- $\forall x \forall y. x \cdot s(y) = (x \cdot y) + x$

Zusätzlich braucht man noch ein *Schema* von Axiomen, um das Induktionsprinzip auszudrücken. Dafür haben wir für alle Variablen x und alle Formeln $A \in F_\Sigma$ das **Induktionsaxiom** für A :

$$A[0/x] \wedge (\forall x. A \rightarrow A[s(x)/x]) \rightarrow \forall x. A$$

Aus diesen Axiomen kann man alle üblichen arithmetischen Eigenschaften, wie z.B. die Kommutativität und Assoziativität der Addition und der Multiplikation, der natürlichen Zahlen herleiten. Es stellt sich aber heraus, dass diese Axiome das Standardmodell \mathbb{N} nicht eindeutig bestimmen.

Um das einzusehen, bezeichnen wir die gerade aufgelisteten Peano-Axiome mit P , erweitern die Signatur um eine zusätzliche Konstante c und betrachten zusätzlich die Formeln A_n

$$\begin{aligned}
 A_0 &:\equiv \neg c = 0 \\
 A_1 &:\equiv \neg c = s(0) \\
 A_2 &:\equiv \neg c = s(s(0)) \\
 &\vdots \\
 A_n &:\equiv \neg c = \underbrace{s(s(\dots s(0)\dots))}_n \\
 &\vdots
 \end{aligned}$$

die aussagen, dass c nicht n ist. Wir betrachten nun die Formelmenge

$$\Gamma := P \cup \{A_n \mid n \in \mathbb{N}\}$$

und stellen fest, dass jede endliche Teilmenge von Γ nur endlich viele A_n enthält und deshalb im Standardmodell \mathbb{N} interpretiert werden kann. Also sind alle endlichen Teilmengen von Γ und nach dem Kompaktheitssatz somit auch Γ erfüllbar. Also hat Γ ein Modell \mathcal{M} , das man wegen dem Satz von Löwenheim und Skolem auch als abzählbar voraussetzen kann. Dieses Modell kann aber nicht \mathbb{N} sein, da c in \mathbb{N} nicht so interpretiert werden kann, dass alle A_n gelten.

Also hat die Peano-Arithmetik Nonstandard-Modelle wie, in denen es außer den “normalen” Zahlen noch andere gibt, für die aber natürlich auch die in der Peano-Arithmetik beweisbaren Aussagen gelten.