Fachbereich Mathematik
Dr. Mathias Kegelmann
Peter Lietz
Tobias Löw
Florence Micol

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Sommersemester 2003
14. Juli 2003

Einführung in die Logik für Informatiker

Lösungshinweise zum elften Übungsblatt

Präsenzübungen

(P 32) Aussagenlogische Herleitungen

(a) Leite folgende Sequenz im Kalkül des Natürlichen Schließens her: $A \to B \dashv\vdash \neg A \lor B$

$$\dfrac{\dfrac{}{\vdash A \lor \neg A}\,(\text{Ax}) \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{}{A \vdash A}\,(\text{Ax}) \quad \dfrac{}{A \to B \vdash A \to B}\,(\text{Ax})}{A \to B, A \vdash B}\,(\to \mathcal{E})}{A \to B, A \vdash \neg A \lor B}\,(\lor\mathcal{I}) \qquad \dfrac{\dfrac{}{A \to B, B \vdash \neg A}\,(\text{Ax})}{A \to B, \neg A \vdash \neg A \lor B}\,(\lor\mathcal{I})}{A \to B \vdash \neg A \lor B}\,(\lor\mathcal{E})$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\neg A \lor B, A \vdash \neg A \lor B}\,(\text{Ax}) \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\neg A \lor B, A \vdash A}\,(\text{Ax}) \quad \dfrac{}{\neg A \vdash \neg A}\,(\text{Ax})}{\neg A \lor B, A, \neg A \vdash \bot}\,(\neg\mathcal{E})}{\neg A \lor B, A, \neg A \vdash B}\,(\bot\mathcal{E}) \qquad \dfrac{}{\neg A \lor B, A, B \vdash B}\,(\text{Ax})}{\neg A \lor B, A \vdash B}\,(\lor\mathcal{E})}{\neg A \lor B \vdash A \to B}\,(\to \mathcal{I})$$

(b) Zeige die Gültigkeit der Regel

$$\dfrac{\Gamma, A, B \vdash C}{\Gamma, A \land B \vdash C}$$

im Kalkül des Natürlichen Schließens.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{A \land B \vdash A \land B}\,(\text{Ax})}{A \land B \vdash B}\,(\land\mathcal{E}) \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{}{A \land B \vdash A \land B}\,(\text{Ax})}{A \land B \vdash A}\,(\land\mathcal{E}) \quad \dfrac{\Gamma, A, B \vdash C}{\Gamma, B, A \vdash C}\,(\text{X})}{\Gamma, A \land B, B \vdash C}\,(\text{Cut})}{\Gamma, A \land B, A \land B \vdash C}\,(\text{Cut})}{\Gamma, A \land B \vdash C}\,(\text{C})$$

(P 33) Prädikatenlogische Herleitungen

Leite folgende Sequenzen im prädikatenlogischen Kalkül des Natürlichen Schließens her:

(a) $\vdash (\forall x.\ A \to B) \to (\exists x.\ A \to \exists x.\ B)$

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{}
\RightLabel{(Ax)}
\UnaryInfC{$\forall x.\ A \to B, \exists x.\ A \vdash \exists x.\ A$}
\AxiomC{}
\RightLabel{(Ax)}
\UnaryInfC{$A \vdash A$}
\AxiomC{}
\RightLabel{(Ax)}
\UnaryInfC{$\forall x.\ A \to B, \exists x.\ A \vdash \forall x.\ A \to B$}
\RightLabel{($\forall\mathcal{E}$)}
\UnaryInfC{$\forall x.\ A \to B, \exists x.\ A \vdash A \to B$}
\RightLabel{($\to\mathcal{E}$)}
\BinaryInfC{$\forall x.\ A \to B, \exists x.\ A, A \vdash B$}
\RightLabel{($\exists\mathcal{I}$)}
\UnaryInfC{$\forall x.\ A \to B, \exists x.\ A, A \vdash \exists x.\ B$}
\RightLabel{($\exists\mathcal{E}$)}
\BinaryInfC{$\forall x.\ A \to B, \exists x.\ A \vdash \exists x.\ B$}
\RightLabel{($\to\mathcal{I}$)}
\UnaryInfC{$\forall x.\ A \to B \vdash \exists x.\ A \to \exists x.\ B$}
\RightLabel{($\to\mathcal{I}$)}
\UnaryInfC{$\vdash (\forall x.\ A \to B) \to (\exists x.\ A \to \exists x.\ B)$}
\end{prooftree}
$$

(b) $\vdash (\exists x.\ A \to B) \leftrightarrow (\forall x.\ A \to \exists x.\ B)$.
Wir zeigen sowohl $\vdash (\exists x.\ A \to B) \to (\forall x.\ A \to \exists x.\ B)$ als auch $\vdash (\forall x.\ A \to \exists x.\ B) \to (\exists x.\ A \to B)$

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{}
\RightLabel{(Ax)}
\UnaryInfC{$\exists x.\ A \to B, \forall x.\ A \vdash \exists x.\ A \to B$}
\AxiomC{}
\RightLabel{(Ax)}
\UnaryInfC{$\exists x.\ A \to B, \forall x.\ A \vdash \forall x.\ A$}
\RightLabel{($\forall\mathcal{E}$)}
\UnaryInfC{$\exists x.\ A \to B, \forall x.\ A \vdash A$}
\AxiomC{}
\RightLabel{(Ax)}
\UnaryInfC{$A \to B \vdash A \to B$}
\RightLabel{($\to\mathcal{E}$)}
\BinaryInfC{$\exists x.\ A \to B, \forall x.\ A, A \to B \vdash B$}
\RightLabel{($\exists\mathcal{I}$)}
\UnaryInfC{$\exists x.\ A \to B, \forall x.\ A, A \to B \vdash \exists x.\ B$}
\RightLabel{($\exists\mathcal{E}$)}
\BinaryInfC{$\exists x.\ A \to B, \forall x.\ A \vdash \exists x.\ B$}
\RightLabel{($\to\mathcal{I}$)}
\UnaryInfC{$\exists x.\ A \to B \vdash \forall x.\ A \to \exists x.\ B$}
\RightLabel{($\to\mathcal{I}$)}
\UnaryInfC{$\vdash (\exists x.\ A \to B) \to (\forall x.\ A \to \exists x.\ B)$}
\end{prooftree}
$$

Der Beweis für $\vdash (\forall x.\ A \to \exists x.\ B) \to (\exists x.\ A \to B)$ setzt sich aus folgenden drei Teilen zusammen:

1.

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{}
\RightLabel{(Ax)}
\UnaryInfC{$\vdash \exists x.\ \neg A \lor \neg \exists x.\ \neg A$}
\AxiomC{}
\RightLabel{(Ax)}
\UnaryInfC{$\exists x.\ \neg A \vdash \exists x.\ \neg A$}
\RightLabel{($\lor\mathcal{I}$)}
\UnaryInfC{$\exists x.\ \neg A \vdash \forall x.\ A \lor \exists x.\ \neg A$}
\AxiomC{}
\RightLabel{(Ax)}
\UnaryInfC{$\neg \exists x.\ \neg A, \neg A \vdash \neg \exists x.\ \neg A$}
\AxiomC{}
\RightLabel{(Ax)}
\UnaryInfC{$\neg \exists x.\ \neg A, \neg A \vdash \neg A$}
\RightLabel{($\exists\mathcal{I}$)}
\UnaryInfC{$\neg \exists x.\ \neg A, \neg A \vdash \exists x.\ \neg A$}
\RightLabel{($\neg\mathcal{E}$)}
\BinaryInfC{$\neg \exists x.\ \neg A, \neg A \vdash \bot$}
\RightLabel{($\neg\mathcal{I}$)}
\UnaryInfC{$\neg \exists x.\ \neg A \vdash \neg\neg A$}
\RightLabel{($\neg\neg$)}
\UnaryInfC{$\neg \exists x.\ \neg A \vdash A$}
\RightLabel{($\forall\mathcal{I}$)}
\UnaryInfC{$\neg \exists x.\ \neg A \vdash \forall x.\ A$}
\RightLabel{($\lor\mathcal{I}$)}
\UnaryInfC{$\neg \exists x.\ \neg A \vdash \forall x.\ A \lor \exists x.\ \neg A$}
\RightLabel{($\lor\mathcal{E}$)}
\TrinaryInfC{$\vdash \forall x.\ A \lor \exists x.\ \neg A$}
\end{prooftree}
$$

2.

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{}
\RightLabel{(Ax)}
\UnaryInfC{$\forall x.\ A \vdash \forall x.\ A$}
\AxiomC{}
\RightLabel{(Ax)}
\UnaryInfC{$\forall x.\ A \to \exists x.\ B \vdash \forall x.\ A \to \exists x.\ B$}
\RightLabel{($\to\mathcal{E}$)}
\BinaryInfC{$\forall x.\ A, \forall x.\ A \to \exists x.\ B \vdash \exists x.\ B$}
\AxiomC{}
\RightLabel{($\exists\mathcal{E}$)}
\UnaryInfC{$\exists x.\ B \vdash \exists x.\ B$}
\AxiomC{}
\RightLabel{(Ax)}
\UnaryInfC{$\exists x.\ B, B, A \vdash B$}
\RightLabel{($\to\mathcal{I}$)}
\UnaryInfC{$\exists x.\ B, B \vdash A \to B$}
\RightLabel{($\exists\mathcal{I}$)}
\UnaryInfC{$\exists x.\ B, B \vdash \exists x.\ A \to B$}
\RightLabel{($\exists\mathcal{E}$)}
\BinaryInfC{$\exists x.\ B \vdash \exists x.\ A \to B$}
\RightLabel{(Cut)}
\BinaryInfC{$\forall x.\ A, \forall x.\ A \to \exists x.\ B \vdash \exists x.\ A \to B$}
\RightLabel{($\to\mathcal{I}$)}
\UnaryInfC{$\forall x.\ A \vdash (\forall x.\ A \to \exists x.\ B) \to (\exists x.\ A \to B)$}
\end{prooftree}
$$

3.

$$
\dfrac{
\dfrac{}{\exists x.\ \neg A \vdash \exists x.\ \neg A}\,(\mathrm{Ax})
\qquad
\dfrac{
\dfrac{
\dfrac{
\dfrac{
\dfrac{
\dfrac{}{\exists x.\ \neg A, \forall x.\ A \to \exists x.\ B, A \vdash A}\,(\mathrm{Ax})
\quad
\dfrac{}{\neg A \vdash \neg A}\,(\mathrm{Ax})
}{\exists x.\ \neg A, \neg A, \forall x.\ A \to \exists x.\ B, A \vdash \bot}\,(\bot\mathcal{I})
}{\exists x.\ \neg A, \neg A, \forall x.\ A \to \exists x.\ B, A \vdash B}\,(\bot\mathcal{E})
}{\exists x.\ \neg A, \neg A, \forall x.\ A \to \exists x.\ B \vdash A \to B}\,(\to\mathcal{I})
}{\exists x.\ \neg A, \neg A, \forall x.\ A \to \exists x.\ B \vdash \exists x.\ A \to B}\,(\exists\mathcal{I})
}{\exists x.\ \neg A, \neg A \vdash \forall x.\ A \to \exists x.\ B \to \exists x.\ A \to B}\,(\to\mathcal{I})
}{\exists x.\ \neg A \vdash (\forall x.\ A \to \exists x.\ B) \to (\exists x.\ A \to B)}\,(\exists\mathcal{E})
$$

Fügt man die drei Teile zusammen, dann folgt

$$
\dfrac{
\dfrac{}{\vdash \forall x.\ A \vee \exists x.\ \neg A}\,(1.)
\quad
\dfrac{}{\forall x.\ A \vdash (\forall x.\ A \to \exists x.\ B) \to (\exists x.\ A \to B)}\,(2.)
\quad
\dfrac{}{\exists x.\ \neg A \vdash (\forall x.\ A \to \exists x.\ B) \to (\exists x.\ A \to B)}\,(3.)
}{\vdash (\forall x.\ A \to \exists x.\ B) \to (\exists x.\ A \to B)}\,(\vee\mathcal{E})
$$

(P 34) Gegenbeispiele

Gib zu jeder Formel jeweils ein Modell an, daß deren Allgemeingültigkeit widerlegt.

(a) $(\forall x.\ \exists y.\ R(x,y)) \to (\exists y.\ \forall x.\ R(x,y))$
$M := \{0,1\}, R^M := \{(0,0),(1,1)\}$

(b) $(\forall x.\ \exists x.\ (R(x) \wedge Q(x))) \leftrightarrow (\forall x.\ R(x) \wedge \exists x.\ Q(x))$
$M := \{0,1\}, R^M := \{0\}, Q^M := \{0\}$

(c) $\Big(\big(\forall x.\ \forall y.\ R(x,y) \to R(y,x)\big) \wedge \big(\forall x.\ \forall y.\ \forall z.\ R(x,y) \wedge R(y,z) \to R(x,z)\big)\Big) \to \forall x.\ R(x,x)$
$M := \{0\}, R^M := \emptyset$

(P 35)

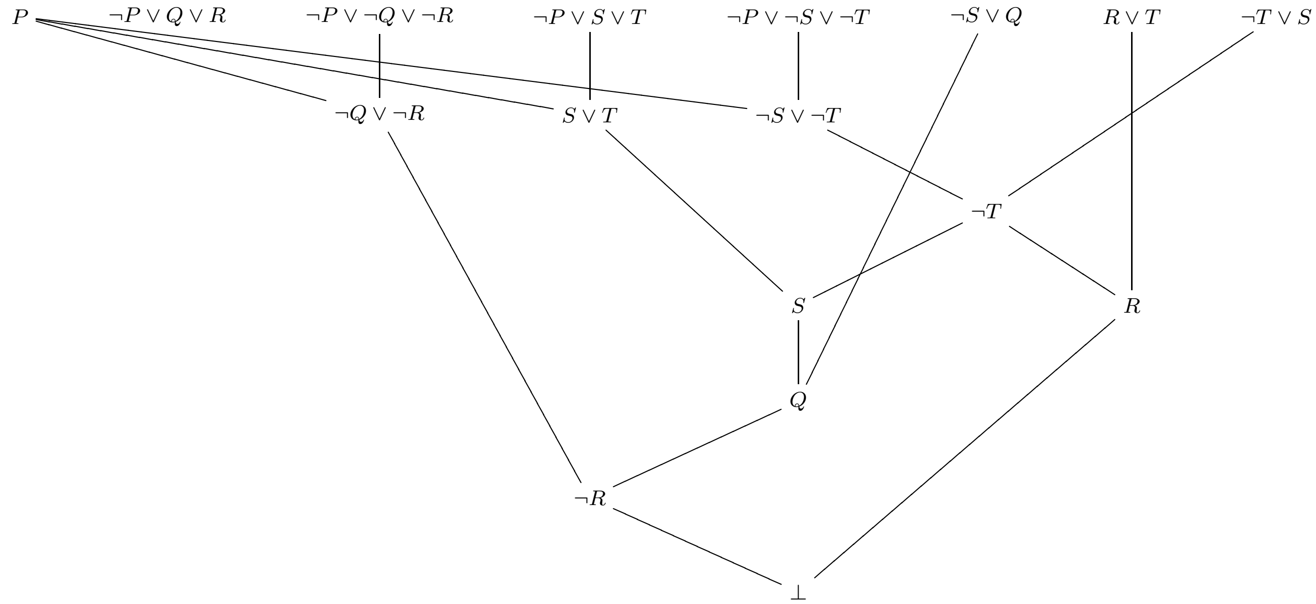
Zeige, daß die folgenden Formeln zusammen inkonsistent sind

1. P
2. $P \to (Q \leftrightarrow \neg R)$
3. $P \to (S \leftrightarrow \neg T)$
4. $S \to Q$
5. $\neg R \to T$
6. $T \to S$

Wir zeigen dies mittels Resolution. Die sechs Formeln sind jeweils equivalent zu

1. P
2. $\neg P \vee ((Q \vee R) \wedge (\neg Q \vee \neg R)) \equiv (\neg P \vee Q \vee R) \wedge (\neg P \vee \neg Q \vee \neg R)$
3. $\neg P \vee ((S \vee T) \wedge (\neg S \vee \neg T)) \equiv (\neg P \vee S \vee T) \wedge (\neg P \vee \neg S \vee \neg T)$
4. $\neg S \vee Q$
5. $R \vee T$
6. $\neg T \vee S$

Es ergeben sich acht Klauseln und folgender Resolutionsbaum:



(P 36) Resolution von Hornklauseln

Wie in der Vorlesung am Beispiel von Prolog demonstriert, sind Hornklauseln, d. h. Formeln der Form

$$\forall x_1. \ldots \forall x_n.\ A_1 \wedge \ldots \wedge A_m \rightarrow B$$

wobei die A_i und B *positiv-primitive* Formeln sind, d. h. nur Terme, Relationen und $\perp$ enthalten, besonders leicht im Resolutionsverfahren verwendbar.

Gegeben seien die folgenden Formeln: (Abkürzungen: e: erbt, a: abstammen, i: ist, v: verzweigt, t: Tier, h: Hund, k: Katze, d: Dackel, s: Spitz, p: Puma, l: Luchs)
Die Formeln sind in Anlehnung an Prolog formuliert und implizit universal quantifiziert.

1. $e(h, t)$
2. $e(d, h)$
3. $e(s, h)$
4. $e(k, t)$
5. $e(p, k)$
6. $e(l, k)$
7. $a(x, y) \leftarrow e(x, y)$
8. $a(x, y) \leftarrow a(x, z) \wedge a(z, y)$
9. $i(x, x)$
10. $i(x, y) \leftarrow a(x, y)$
11. $v(x, x, x)$
12. $v(x, y, z) \leftarrow e(y, u) \wedge v(x, u, z)$
13. $v(x, y, z) \leftarrow e(z, u) \wedge v(x, y, u)$

Wir wollen aus den obigen 13 Formeln, die wir mit $F_1, \ldots, F_{13}$ bezeichnen, die Gültigkeit weiterer Formeln herleiten.
Besonders einfach wird dies, wenn die herzuleitende Formel positiv-primitiv ist. Will man nämlich für eine positiv-primitive Formel A zeigen, daß $(F_1 \wedge \ldots \wedge F_{13}) \rightarrow A$ gilt, muß man $\neg\big((F_1 \wedge \ldots \wedge F_{13}) \rightarrow A\big)$ widerlegen. Diese Formel ist äquivalent zu $F_1 \wedge \ldots \wedge F_{13} \wedge \neg A$, welche (wie wir gleich sehen werden) in konjunktiver Normalform ist.

(a) Bilde für eine positiv-primitive Formel A die Klauselmenge, um $(F_1 \wedge \ldots \wedge F_{13}) \rightarrow A$ zu beweisen.

Die Klauseln lauten

1. $\{e(h, t)\}$
2. $\{e(d, h)\}$
3. $\{e(s, h)\}$
4. $\{e(k, t)\}$
5. $\{e(p, k)\}$
6. $\{e(l, k)\}$
7. $\{a(x, y), \neg e(x, y)\}$
8. $\{a(x, y), \neg a(x, z), \neg a(z, y)\}$
9. $\{i(x, x)\}$
10. $\{i(x, y), \neg a(x, y)\}$
11. $\{v(x, x, x)\}$
12. $\{v(x, y, z), \neg e(y, u), \neg v(x, u, z)\}$
13. $\{v(x, y, z), \neg e(z, u), \neg v(x, y, u)\}$
14. $\neg A$

(b) Zeige mit dem Resolutionsverfahren, daß aus $F_1, \dots, F_{13}$ die folgenden Formeln folgen:

1. $i(l, t)$

   Setzt man in der obigen Klauselmenge $A \equiv i(l, t)$ so folgt:

   15. $\{\neg a(l, t)\}$ aus 10. und 14.
   16. $\{a(l, k)\}$ aus 7. und 10.
   17. $\{a(k, t)\}$ aus 4. und 10.
   18. $\{a(l, y), \neg a(k, y)\}$ aus 8. und 16.
   19. $\{a(l, t)\}$ aus 17. und 18.
   20. $\emptyset$ aus 15. und 19.

2. $v(h, d, s)$

   Setzt man in der obigen Klauselmenge $A \equiv v(h, d, s)$ so folgt:

   15. $\{\neg e(d, u), \neg v(h, u, s)\}$ aus 12. und 14.
   16. $\{\neg v(h, h, s)\}$ aus 2. und 15.
   17. $\{\neg e(s, u), \neg v(h, h, u)\}$ aus 13. und 16.
   18. $\{\neg v(h, h, h)\}$ aus 3. und 17.
   19. $\emptyset$ aus 11. und 18.