Fachbereich Mathematik
Mathias Kegelmann, Ph.D.

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Sommersemester 2003
18. Juli 2003

Logik für Informatik

Klausur

Name: . . . .
Vorname: . . . .
Matrikel#: . . . .
Fachrichtung: . . . .

Bitte die Blätter mit Namen versehen, fortlaufend nummerieren, am Schluss der Klausur in die einmal gefalteten Aufgabenblätter legen und mit diesen persönlich abgeben.

Aufgabe	1	2	3	4	5	Summe	Note
Punkte	20	20	25	25	20	110	

Aufgabe 1 [Aussagenlogisches Natürliches Schließen] (20 Punkte)

(a) Leite folgende Sequenzen mit dem *Kalkül des Natürlichen Schließens* her: (13)

(i) $\neg(p_0 \vee p_1), p_0 \vee p_2 \vdash p_2$

(ii) $\neg(p_0 \vee p_1), \neg p_1 \to p_0 \vdash p_1$

(*Hinweis*: Für Teil (ii) braucht man klassische Logik.)

(b) Zeige, dass die folgende Regel mit Hilfe der anderen Regeln des Natürlichen Schließens herleitbar ist: (7)

$$\frac{\Gamma \vdash A \qquad \Delta, B \vdash C}{\Gamma, \Delta, A \to B \vdash C}$$

(*Hinweis*: D.h. es gibt eine Herleitung für $\Gamma, \Delta, A \to B \vdash C$, die nicht nur mit der Regel (Ax) sondern auch mit den Sequenzen $\Gamma \vdash A$ und $\Delta, B \vdash C$ beginnen kann.)

Aufgabe 2 [Modelle und Gegenbeispiele] (20 Punkte) Wir betrachten die Signatur $\Sigma = (\Omega, \mathcal{R}, \alpha)$ mit $\Omega = \{c, f\}$, $\mathcal{R} = \{P, R\}$ und $\alpha(c) = 0$, $\alpha(P) = \alpha(f) = 1$, $\alpha(R) = 2$ gegeben ist.

Finde Modelle, die zeigen, dass die folgenden Sequenzen nicht gelten:

(a) $\forall x.\, R(x, f(x)), \forall x \exists y.\, R(x, y) \vdash \forall x \exists y.\, R(y, x)$ (10)

(b) $P(c), \forall x.\, P(x) \to P\big(f(x)\big), \forall x \exists y.\, x = f(y) \vdash \forall x.\, P(x)$ (10)

Aufgabe 3 [Prädikatenlogisches Natürliches Schließen] (25 Punkte) Wir betrachten die Signatur, die durch $\Omega = \emptyset$, $\mathcal{R} = \{P, Q, R\}$ und $\alpha(P) = \alpha(Q) = 1$, $\alpha(R) = 2$ gegeben ist. Leite folgende Sequenzen mit dem *Kalkül des Natürlichen Schließens* her:

(a) $\vdash \Big(\big(\forall x.\ P(x)\big) \wedge \big(\forall x.\ Q(x)\big)\Big) \rightarrow \big(\forall x.\ P(x) \wedge Q(x)\big)$ (10)

(b) $\forall x.\ \big(P(x) \wedge \neg Q(x)\big) \rightarrow R(x, x) \vdash \forall x.\ \Big(P(x) \rightarrow \big(Q(x) \vee \exists y.\ R(x, y)\big)\Big)$ (15)

(*Hinweis*: Für Teil (b) braucht man klassische Logik.)

Aufgabe 4 [Kompaktheitssatz] (25 Punkte) Wir betrachten die Signatur mit $\Omega = \{0, 1, +, -, \cdot\}$, $\mathcal{R} = \{<\}$ und $\alpha(0) = \alpha(1) = 0$, $\alpha(-) = 1$, $\alpha(+) = \alpha(\cdot) = \alpha(<) = 2$. Ferner sei $\mathcal{T}$ die Menge aller geschlossenen Formeln, die in $\mathbb{R}$ (bei der üblichen Interpretation der Symbole) gelten.

(a) Zeige, dass es ein Modell $\boldsymbol{R}^*$ gibt, in dem genau die gleichen geschlossenen Formeln gelten, das aber ein Element Δ enthält, für das $0 < \Delta$ und $\underbrace{\Delta + \cdots + \Delta}_{n \text{ mal}} < 1$ für alle $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ gilt. (15)

(b) Zeige, dass ein solches Modell $\boldsymbol{R}^*$ auch $1/\Delta$ enthält (also ein $U \in R^*$ mit $U \cdot \Delta = 1$) und dass für alle $n \in \mathbb{N}$ stets $n = \underbrace{1 + \cdots + 1}_{n \text{ mal}} < 1/\Delta$ gilt. (10)

Aufgabe 5 [Resolution] (20 Punkte) Sei die Signatur Σ durch $\Omega = \{f\}$, $\mathcal{R} = \{P, Q, R\}$ und $\alpha(Q) = \alpha(f) = 1$, $\alpha(P) = \alpha(R) = 2$ gegeben.

Zeige mit Hilfe des *Resolutionsverfahrens* die Allgemeingültigkeit der folgenden Formel:

$$\Big(\exists z \forall x\ \big(P(x, f(z)) \vee Q(x)\big) \wedge \neg R(f(z), x) \wedge \big(P(x, x) \rightarrow R(x, x)\big)\Big) \rightarrow \exists x.\ Q\big(f(x)\big)$$