Fachbereich Mathematik
Mathias Kegelmann, Ph.D.

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Wintersemester 2002/03
18. Juli 2003

Allgemeine Algebra für Inf./WI-Inf.

Klausur

Name: ....
Vorname: ....
Matrikel#: ....
Fachrichtung: ....

Bitte die Blätter mit Namen versehen, fortlaufend nummerieren, am Schluss der Klausur in die einmal gefalteten Aufgabenblätter legen und mit diesen persönlich abgeben.

Aufgabe	1	2	3	4	5	Summe	Note
Punkte	20	20	20	25	15	100	

Für das Bestehen der Klausur reichen 40 Punkte!

Aufgabe 1 [Algebraische Induktion] (20 Punkte) Sei $\boldsymbol{M}$ ein Monoid, das von $X \subseteq M$ erzeugt wird, also $\langle X \rangle = M$. Ferner sei $h\colon \boldsymbol{M} \to (\mathbb{R}; \cdot, 1)$ ein Monoid-Homomorphismus.

Zeige *mit algebraischer Induktion*: Wenn es ein $m \in M$ mit $h(m) \leq 0$ gibt, dann muss es auch einen Erzeuger $x \in X$ mit $h(x) \leq 0$ geben.

Aufgabe 2 [Isomorphiesatz] (20 Punkte) Seien $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ und $\boldsymbol{B}'$ Algebren gleichen Typs Σ. Ferner seien $h\colon \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B}$ sowie $h'\colon \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B}'$ *surjektive* Homomorphismen, die $\mathsf{kern}(h) = \mathsf{kern}(h')$ erfüllen. Zeige, dass dann B und B' isomorph sind.

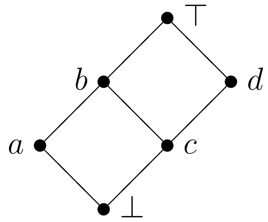
Aufgabe 3 [Kongruenzrelationen] (20 Punkte) Seien $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{A}'$ und $\boldsymbol{B}'$ Algebren gleichen Typs Σ und $h\colon \boldsymbol{A}' \to \boldsymbol{B}'$ ein Homomorphismus. Wir definieren nun eine Relation $R \subseteq (A \times A')^2$ wie folgt:

$$(x, x')\ R\ (y, y') :\Longleftrightarrow\ h(x') = h(y')$$

Zeige, dass R eine Kongruenzrelation auf $\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{A}'$ ist.

Aufgabe 4 [Verbände] (25 Punkte)

(a) Betrachte den im folgenden Hasse-Diagramm skizzierten Verband V: (5)



Berechne:

(i) $b \wedge d$

(ii) $a \wedge d$

(iii) $b \vee d$

(iv) $a \wedge b$

(b) (5)

(i) Zeichne das Hasse-Diagramm eines *zweielementigen* Verbandes und eines *dreielementigen* Verbandes.

(ii) Zeige, dass diese (bis auf Isomorphie) eindeutig bestimmt sind.

(c) Die beiden Verbände aus Teilaufgabe (b) bezeichnet man mit C_2 bzw. C_3. Zeige dass der Verband V aus Teilaufgabe (a) isomorph zu $C_2 \times C_3$ ist. (5)

Hinweis Es reicht, wenn du dazu — *ohne* Nachrechnen der Homomorphiebedingung — den Isomorphismus angibst.

(d) Zeige, dass jeder Verband, der total geordnet[1] ist, immer auch distributiv ist. (5)

(e) Seien nun V_1 und V_2 beliebige distributive Verbände. Zeige, dass dann auch $V_1 \times V_2$ distributiv ist. (5)

Aufgabe 5 [Hüllensysteme] (15 Punkte) Eine Teilmenge $M \subseteq \mathbb{R}^3$ heißt *konvex*, wenn zu je zwei Punkten $x, y \in M$ die ganze Verbindungsstrecke $\overline{xy}$ auch in M liegt, also wenn $\overline{xy} \subseteq M$. Sei nun $\mathcal{K}$ die Menge *aller* konvexen Mengen:

$$\mathcal{K} := \{M \subseteq \mathbb{R}^3 \mid \forall x, y \in M.\, \overline{xy} \subseteq M\}$$

(a) Zeige, dass $\mathcal{K}$ ein Hüllensystem ist. (5)

(b) Was ist die Hülle $h_{\mathcal{K}}\big(\{x, y, z\}\big)$ für drei beliebige Punkte $x, y, z \in \mathbb{R}^3$? (5)

(c) Zeige oder widerlege, dass die Vereinigung von zwei konvexen Mengen wieder konvex ist. (5)

[1] Man sagt dazu auch *Kette*; siehe Definition 6.2.