Logik für Informatiker

Prof. Dr. Thomas Streicher

SS 2001

Einführung

Nachdem wir im vorigen Semester allgemeine algebraische Strukturen und ihre Eigenschaften studiert haben und auch ein vollständiges Beweissystem für die Gleichungslogik kennengelernt haben, werden wir in diesem Semester die wichtigsten Kalküle der mathematischen Logik und ihre metamathematischen Eigenschaften studieren.
Wie schon bei der Gleichungslogik werden wir uns auf den Aspekt der *Vollständigkeit* konzentrieren. D.h. wir werden Deduktionssysteme betrachten, die eine Aussage genau dann herzuleiten gestatten, wenn sie in allen Modellen gültig sind. Dazu müssen wir vorab mathematisch präzise definieren, was überhaupt ein Modell ist und was Gültigkeit in einem Modell heißt. Die vollständigen Herleitungssysteme, denen wir im Verlauf der Vorlesung begegnen, werden z.T. so einfach sein, daß sie selbst als "operationale" Erklärung der intuitiven Bedeutung der logischen Grundbegriffe dienen können. Insbesondere wird dies für den auf Gerhard GENTZEN zurückgehenden Kalkül des *Natürlichen Schließens* der Fall sein. Darüber hinausgehend werden wir das sogenannte *Resolutionsverfahren* kennenlernen, das sich besonders für das automatische Beweisen eignet.

Was ist mathematische Logik?

Ziel der mathematischen Logik ist es, einen formalsprachlichen Rahmen abzustecken, in dem sich (wesentliche Teile der) Mathematik formulieren lassen. Solche Formalismen werden mit einer klaren Bedeutungstheorie(=Semantik) und Herleitungssystemen ausgestattet, in denen man semantische Gültigkeit durch Herleitungen mithilfe syntaktischer Regeln nachweisen kann. Dies erlaubt uns, Aussagen über unendliche Mengen wie z.B. $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ etc. durch endliche Prozesse zu verifizieren.
Die Aussagen der Mathematik bzw. Informatik sind strukturiert und werden aus primitiven (atomaren) Aussagen (wie z.B. Gleichungen) mithilfe logischer Operationen aufgebaut. Wir sehen uns dies anhand einiger Beispiele an.

(1) $\forall x.\forall y.\ xy = 0 \to x = 0 \vee y = 0$

(2) $\forall x.\forall y.\ 0 < x \wedge 0 < y \to 0 < x + y$

(3) $\forall x.\ \neg x = 0 \to \exists y.\ xy = 1$

(4) $\exists k{\in}\mathbb{N}.\ n = 2k$ $\quad$ ("n ist gerade")

(5) $\forall \varepsilon.\ \varepsilon > 0 \to \exists n.\forall m.\ n < m \to |b - a_m| < \varepsilon$ $\quad$ ("a konvergiert gegen b").

Primitive (oder atomare) Aussagen sind von der Form

$$t = s \quad \text{oder} \quad t < s \qquad (t, s \text{ Terme})$$

und werden mithilfe logischer Operationen zu komplexen mathematischen Aussagen kombiniert. Die logischen Operationen unterteilen sich in folgende zwei Gruppen.

Aussagenlogische Operationen

$\wedge$	Konjunktion	("und")
$\vee$	Disjunktion	("oder")
$\rightarrow$	Implikation	("wenn…, dann…")
$\neg$	Negation	("nicht")

Quantoren

$\forall x$	universelle Quantifikation	("für alle x")
$\exists x$	existenzielle Quantifikation	("es gibt ein x")

Für die aussagenlogischen Operatoren ist es irrelevant, wie die primitiven (atomaren) Aussagen aufgebaut sind. Für die Bedeutung der Quantoren jedoch ist die Struktur der primitiven Aussagen wesentlich, da die Quantoren $\forall x$ und $\exists x$ sich auf die in den primitiven Aussagen vorkommenden x beziehen. Ganz allgemein haben primitive oder atomare Aussagen die Form

$$P(t_1, \ldots, t_n)$$

wobei P ein (n–stelliges) Prädikatensymbol ist und $t_1, \ldots, t_n$ Terme sind.[1]
Die Logik mit Quantoren nennt man *Prädikatenlogik* oder *Logik 1. Stufe*, da man in ihr über Objekte quantifizieren kann, nicht jedoch über Prädikate (wie in Logiken 2. oder höherer Stufe).

[1]Der Begriff "Prädikat" entspricht den umgangssprachlichen Begriffen "Eigenschaft" oder "Beziehung" ("Relation"). Die Beziehung P besteht zwischen den mit $t_1, \ldots, t_n$ bezeichneten Objekten genau dann, wenn die Aussage $P(t_1, \ldots, t_n)$ wahr ist. Grundlegende Beziehungen wie z.B. Gleichkeit oder "echt kleiner als" werden mithilfe der Prädikatensymbole $=$ und $<$ ausgedrückt. Kompliziertere Eigenschaften oder Relationen können durch logische Formeln ausgedrückt werden wie in den Beispiel (4) und (5) auf Seite 1. Die Eigenschaft "n ist gerade" wird durch die Formel $\exists k{\in}\mathbb{N}.\, n{=}2k$ und die Relation "a konvergiert gegen b" durch die Formel $\forall \varepsilon.\, \varepsilon{>}0 \rightarrow \exists n. \forall m.\, n{<}m \rightarrow |b - a_m|{<}\varepsilon$ zum Ausdruck gebracht. Ganz allgemein definiert eine Formel $A(x_1, \ldots, x_n)$ eine n–stellige Relation, die zwischen $t_1, \ldots, t_n$ genau dann besteht, wenn $A(t_1, \ldots, t_n)$ wahr ist, wobei $A(t_1, \ldots, t_n)$ die Aussage bezeichnet, die man erhält, indem man in $A(x_1, \ldots, x_n)$ die Variablen x_i durch die Terme t_i ersetzt.

In der Fachsprache der Logik verwendet man den Ausdruck "Prädikat" anstatt der vielleicht allgemeinverständlicheren Ausdrücke "Eigenschaft" bzw. "Relation". Der Grund dafür ist die Analogie zur natürlichen Sprache, wo ein Prädikat eine Eigenschaft des Subjekts bzw. eine Relation zwischen dem Subjekt und dem Objekt bzw. den Objekten ausdrückt. Die Reihenfolge der Argumente eines Prädikats wird in der natürlichen Sprache durch Kasus (Fälle) bzw. die Wortstellung zum Ausdruck gebracht.

Aufgrund obiger Betrachtungen liegt es nahe, zuerst die Aussagenlogik und danach die Prädikatenlogik als reichhaltigeres System zu untersuchen.
Die Aussagenlogik kann man als dasjenige Fragment der Prädikatenlogik verstehen, wo alle Prädikatensymbole 0–stellig sind und deshalb alle Aussagen die Form $P()$ haben (d.h. $P(t_1, \ldots, t_n)$ mit $n{=}0$). Klarerweise ist die Bedeutung von Formeln dieses Fragments absolut unabhängig von der Bedeutung der Terme, da diese schlechterdings in den Formeln dieses Fragments nicht vorkommen. Insbesondere kommen in den Formeln dieses Fragments auch keine Variablen vor, womit auch die Quantoren überflüssig werden.
Obwohl in der Aussagenlogik keine Beziehungen zwischen (durch Terme denotierten) Objekten ausgedrückt werden können, werden wir dennoch sogleich sehen, daß es über die Aussagenlogik einiges zu sagen gibt.

I AUSSAGENLOGIK

I.1 Die Syntax der Aussagenlogik

Wir definieren zuerst den Begriff einer aussagenlogischen Formel.

Definition 1.1 *Sei* $\mathsf{PC} = \{p_n | n \in \mathbb{N}\}$ *eine abzählbar unendliche Menge von* propositionalen Konstanten *(engl.* propositional constants*). Die Menge* PROP *der* aussagenlogischen Formeln *sei induktiv durch folgende Regeln definiert*

(1) $\mathsf{PC} \subseteq \mathsf{PROP}$, *d.h. jede propositionale Konstante ist eine aussagenlogische Formel*

(2) $\bot \in \mathsf{PROP}$ *(die Konstante* $\bot$ *("Falsum") ist eine aussagenlogische Formel)*

(3) *wenn* $A, B \in \mathsf{PROP}$, *dann* $(A \wedge B), (A \vee B), (A \to B) \in \mathsf{PROP}$

wobei in (2) *vorausgesetzt wird, daß* $\bot \notin \mathsf{PC}$. ◊

Bemerkung Wir verwenden die Buchstaben $A, B, C, \ldots$ als *Metavariablen* für aussagenlogische Formeln. Klammern werden oft aus Gründen der Lesbarkeit weggelassen und sind *sinngemäß* zu ergänzen.[2]

Meist wird statt der aussagenlogischen Konstanten $\bot$ (Falsum, die für die immer falsche Aussage steht) ein 1–stelliger Operator $\neg$ für die Negation neben den 2–stelligen Operatoren $\wedge, \vee, \to$ angenommen. Wir definieren jedoch $\neg$ mithilfe von $\to$ und $\bot$ wie folgt.

Definition 1.2 *Sei* $\neg : \mathsf{PROP} \to \mathsf{PROP}$ *definiert als*

$$\neg A \equiv (A \to \bot) \quad .$$

Wir nennen $\neg A$ *die "Negation von* A*".* ◊

I.2 Semantik der Aussagenlogik

Die Bedeutung einer aussagenlogischen Formel ist ein *Wahrheitswert*, d.h. tt ("true") oder ff ("false"). Die Bedeutung einer zusammengesetzten Formel hängt dabei von der Bedeutung ihrer unmittelbaren Teilformeln ab, wobei die Bedeutung der propositionalen Konstanten durch eine sogenannte *Belegung* festgelegt wird, die für jedes $p_n \in \mathsf{PC}$ festlegt, ob es tt oder ff ist.

[2] Oftmals werden "Vorrangregeln" eingeführt, die vorschreiben, wie weggelassene Klammern zu ergänzen sind. Wir verzichten darauf, da jede Wahl von Vorrangregeln erzwingt, in manchen Fällen Klammern zu setzen, wo dies "unschön" ist. Wir vertrauen darauf, daß die intendierte Klammerung immer aus dem Kontext klar ist.

Definition 2.1 *Sei* $\mathbb{B} = \{\mathsf{tt}, \mathsf{ff}\}$ *die Menge der* Wahrheitswerte *(auch "boolesche Werte" genannt). Mit* pVal *bezeichnen wir die Menge aller Funktionen* $\rho : \mathsf{PC} \to \mathbb{B}$*. Die Elemente von* pVal *heißen auch* (aussagenlogische) Belegungen *(engl.* propositional valuations*). Die* Bedeutung *oder* Semantik *einer aussagenlogischen Formel* A *ist nun eine Funktion*

$$[\![A]\!] : \mathsf{pVal} \to \mathbb{B}$$

die wir erhalten, indem wir auf A *die* Interpretationsfunktion

$$[\![\cdot]\!] : \mathsf{PROP} \to \mathbb{B}^{\mathsf{pVal}}$$

anwenden, die durch Rekursion über den Aufbau aussagenlogischer Formeln wie folgt definiert ist

$$[\![p_n]\!]\rho = \rho(p_n) \quad \textit{für alle } n{\in}\mathbb{N}$$

$$[\![\bot]\!] = \mathsf{ff}$$

$$[\![A{\wedge}B]\!]\rho = [\![A]\!]\rho \wedge_{\mathbb{B}} [\![B]\!]\rho$$

$$[\![A{\vee}B]\!]\rho = [\![A]\!]\rho \vee_{\mathbb{B}} [\![B]\!]\rho$$

$$[\![A{\to}B]\!]\rho = [\![A]\!]\rho \to_{\mathbb{B}} [\![B]\!]\rho$$

wobei $\wedge_{\mathbb{B}}, \vee_{\mathbb{B}}, \to_{\mathbb{B}}: \mathbb{B} \times \mathbb{B} \to \mathbb{B}$ *durch folgende (wohlbekannte) Tabellen*

$\wedge_{\mathbb{B}}$	tt	ff
tt	tt	ff
ff	ff	ff

$\vee_{\mathbb{B}}$	tt	ff
tt	tt	tt
ff	tt	ff

$\to_{\mathbb{B}}$	tt	ff
tt	tt	ff
ff	tt	tt

gegeben sind. ◊

Man beachte, daß $[\![A{\to}B]\!]\rho = \mathsf{ff}$ genau dann, wenn $[\![A]\!]\rho = \mathsf{tt}$ und $[\![B]\!]\rho = \mathsf{ff}$. Also ist $[\![A{\to}B]\!]\rho = \mathsf{tt}$, sobald $[\![A]\!]\rho = \mathsf{ff}$. Dieses Prinzip wird auch oft als *ex falso quodlibet* bezeichnet und eifrig hinterfragt, weil es dem umgangssprachlichen Verständnis der Implikation zuwiderläuft, daß bei einer Implikation $A{\to}B$ ein "inhaltlicher Zusammenhang" zwischen der Prämisse A und der Konklusion B gegeben sein muß. Ein solcher "inhaltlicher Zusammenhang" läßt sich jedoch rein formal nicht erfassen (genausowenig wie "sinnvolle Aussage" oder "sinnvolles Programm").

I.3 Verallgemeinerte Semantik der Aussagenlogik

In diesem Abschnitt betrachten wir Interpretationen der Aussagenlogik in bestimmten Verbänden. Die Elemente solcher Verbände betrachten wir als verallgemeinerte Wahrheitswerte und die Ordnungsrelation zwischen solchen verallgemeinerten Wahrheitwerten interpretieren wir als *Folgebeziehung*, wobei wir $a \leq b$ als "aus a folgt b" lesen.[3]

Diese verallgemeinerte Semantik benützen wir, um den Unterschied zwischen klassischer und intuitionistischer Logik klarzumachen und zur Strukturierung des Vollständigkeitsbeweises für die Aussagenlogik.

Obwohl schon aus der Vorlesung "Allgemeine Algebra" bekannt wiederholen wir die Begriffe *Heyting–Verband* und *boolescher Verband* aufgrund ihrer zentralen Bedeutung (für eine *algebraische Sicht der Logik*).

Definition 3.1 *Eine partielle Ordnung* $(L, \leq)$ *heißt* Heyting–Verband *genau dann, wenn alle endlichen Teilmengen von* L *Infima und Suprema besitzen und für alle* $a, b \in L$ *ein* $c \in L$ *existiert, sodaß für alle* $x \in L$

$$a \wedge x \leq b \Longleftrightarrow x \leq c$$

gilt. Da dieses c *in Abhängigkeit von* a *und* b *eindeutig als das größte Element der Menge* $\{x \in L | a \wedge x \leq b\}$ *bestimmt ist, bezeichnen wir es mit* $a \to b$.
Auf L *sei die* 1*–stellige Operation* $\neg : L \to L$ *als*

$$\neg a = a \to 0$$

definiert, wobei 0 *das kleinste Element von* L *ist.*
Ein boolescher Verband *ist ein Heyting–Verband* $(L, \leq)$*, in dem* $\neg\neg a \leq a$ *für alle* $a \in L$ *gilt.* $\Diamond$

Wie schon in der Allgemeinen Algebra bezeichen wir mit 0 bzw. 1 das kleinste bzw. größte Element eines (Heyting–)Verbands, welche man als Infimum bzw. Supremum der leeren Menge erhält.

Beispiel 3.2

(1) *Für jede Menge* X *ist* $(\mathcal{P}(X), \subseteq)$ *ein (vollständiger) boolescher Verband.*

(2) *Für jede partiell geordnete Menge* $(P, \leq)$ *ist* $(\mathsf{dcl}(P, \leq), \subseteq)$ *ein (vollständiger) Heyting Verband. (Zur Erinnerung:* $\mathsf{dcl}(P, \leq)$ *ist die Menge aller* $a \subseteq P$*, sodaß* $y \leq x \in a \Rightarrow y \in a$*.) Man kann zeigen, daß* $(\mathsf{dcl}(P, \leq), \subseteq)$ *genau dann ein boolescher Verband ist, wenn* $(P, \leq)$ diskret *ist, d.h.* $x \leq y \Rightarrow x = y$.

[3] Beispielsweise können wir die Aussagenlogik in dem Verband $(\mathcal{P}(W), \subseteq)$ interpretieren. Dabei stelle man sich W als Menge "möglicher" Welten vor. Eine Aussage wird dann interpretiert als die Menge möglicher Welten, in der sie gilt, und b folgt aus a genau dann, wenn $a \subseteq b$, d.h., wenn in jeder Welt w, in der a gilt, auch b gilt.

Lemma 3.3 *Sei* $(L, \leq)$ *ein Heyting–Verband. Dann gilt für alle* $a, b \in L$ *:*

(i) $a \wedge (a \rightarrow b) \leq b$ *und somit* $a \wedge \neg a \leq 0$*, also auch* $a \leq \neg\neg a$

(ii) *wenn* $a \leq b$*, dann* $\neg b \leq \neg a$

(iii) $\neg(a \vee b) = \neg a \wedge \neg b$

(iv) $\neg 0 = 1$ *und* $\neg 1 = 0$

(v) $a \vee \neg a = 1$ *wenn* $(L, \leq)$ *boolesch ist.*

Beweis:
(i) Es gilt $a \wedge (a \rightarrow b) \leq b$ genau dann, wenn $a \rightarrow b \leq a \rightarrow b$, und letzteres ist der Fall aufgrund der Reflexivität von $\leq$. Indem wir 0 für b einsetzen, erhalten wir $a \wedge \neg a \leq 0$ und somit aufgrund der definierenden Eigenschaft von $\rightarrow$, daß $a \leq \neg\neg a$.
(ii) Wenn $a \leq b$, dann $a \wedge \neg b \leq 0$, weil $b \wedge \neg b \leq 0$ aufgrund von (i). Somit $\neg b \leq \neg a$ aufgrund der definierenden Eigenschaft von $\rightarrow$.
(iii) Wir zeigen, daß für alle $x \in L$

$$x \leq \neg(a \vee b) \Longleftrightarrow x \leq \neg a \wedge \neg b$$

woraus die Behauptung unmittelbar folgt. Sei also $x \in L$. Dann gilt

$$\begin{array}{ll}
x \leq \neg(a \vee b) & \text{gdw} \\
(a \vee b) \wedge x \leq 0 & \text{gdw} \\
a \vee b \leq \neg x & \text{gdw} \\
a \leq \neg x \text{ und } b \leq \neg x & \text{gdw} \\
a \wedge x \leq 0 \text{ und } b \wedge x \leq 0 & \text{gdw} \\
x \leq \neg a \text{ und } x \leq \neg b & \text{gdw} \\
x \leq \neg a \wedge \neg b &
\end{array}$$

womit die Behauptung bewiesen ist.
(iv) Es gilt $\neg 0 = 0 \rightarrow 0 = 1$ und $\neg 1 = 0$, da $x \leq \neg 1 \Leftrightarrow x \wedge 1 \leq 0 \Leftrightarrow x \leq 0$ für alle $x \in L$.
(v) Weil $(L, \leq)$ ein boolescher Verband ist, genügt es zu zeigen, daß $\neg\neg(a \vee \neg a) = 1$. Weil $\neg 0 = 1$, reicht es aber zu zeigen, daß $\neg(a \vee \neg a) = 0$, was aber gilt, weil

$$\neg(a \vee \neg a) = \neg a \wedge \neg\neg a = 0$$

wobei die erste Gleichheit mit (iii) und die zweite mit (i) folgt. $\square$

Man kann zeigen (Übung!), daß ein Heyting–Verband L boolesch ist, wenn $a \vee \neg a = 1$ für alle $a \in L$. Dieses letztere Prinzip wird oft auch als *tertium non datur* bezeichnet.
Folgendes Distributivitätslemma wird im weiteren von großem Nutzen sein.

Lemma 3.4 *In einem Heyting–Verband* $(L, \leq)$ *gilt*

$$c \wedge (a \vee b) = (c \wedge a) \vee (c \wedge b)$$

für alle $a, b, c \in L$.

Beweis: Für beliebige Elemente $x \in L$ gilt

$$\begin{array}{ll} c \wedge (a \vee b) \leq x & \text{gdw} \\ a \vee b \leq c \to x & \text{gdw} \\ a \leq c \to x \text{ und } b \leq c \to x & \text{gdw} \\ a \wedge c \leq x \text{ und } b \wedge c \leq x & \text{gdw} \\ (a \wedge c) \vee (b \wedge c) \leq x & \end{array}$$

woraus die gewünschte Gleichheit unmittelbar folgt. □

Wir zeigen nun, daß in booleschen Verbänden $\neg a$ das *Komplement* von a ist, d.h. $a \wedge \neg a = 0$ und $a \vee \neg a = 1$. In Heyting–Verbänden gilt die zweite Eigenschaft im allgemeinen nicht, sondern bloß, daß $\neg a$ das größte x mit $a \wedge x = 0$ ist, welches oft als *Pseudokomplement von* a bezeichnet wird.

Lemma 3.5 *Sei* $(L, \leq)$ *ein Heyting–Verband. Dann gilt für* $a, b \in L$, *daß*

(i) $a \wedge b \leq 0 \Longleftrightarrow b \leq \neg a$

(ii) $a \vee b = 1 \Longrightarrow \neg a \leq b$

(iii) *wenn* b *Komplement von* a, *d.h.* $a \wedge b = 0$ *und* $a \vee b = 1$, *dann* $a = \neg b$

(iv) $\neg a \vee b \leq a \to b$

(v) $\neg a \vee b = a \to b$ *wenn* $(L, \leq)$ *boolesch ist.*

Beweis: (i) folgt unmittelbar aus der Kommutativität von $\wedge$ und der definierenden Eigenschaft von $\to$.
(ii) Angenommen $a \vee b = 1$, dann

$$\neg a = \neg a \wedge 1 = \neg a \wedge (a \vee b) \stackrel{L3.4}{=} (\neg a \wedge a) \vee (\neg a \wedge b) = 0 \vee (\neg a \wedge b) = \neg a \wedge b \leq b\,.$$

(iii) Angenommen $a \wedge b = 0$ und $a \vee b = 1$. Dann folgt wegen (i) bzw. (ii), daß $b \leq \neg a$ und $\neg a \leq b$, also $\neg a = b$.
(iv) Wegen Lemma 3.4 gilt

$$a \wedge (\neg a \vee b) = (a \wedge \neg a) \vee (a \wedge b) = 0 \vee (a \wedge b) = a \wedge b \leq b$$

woraus unmittelbar folgt, daß $\neg a \vee b \leq a \to b$ (aufgrund der definierenden Eigenschaft von $\to$).
(v) In einem booleschen Verband gilt

$$\neg a \vee b = \neg\neg(\neg a \vee b) = \neg(\neg\neg a \wedge \neg b) = \neg(a \wedge \neg b)$$

Also genügt es zu zeigen, daß $a \to b \leq \neg(a \wedge \neg b)$, was wiederum (aufgrund der definierenden Eigenschaft von $\to$) äquivalent ist zu $a \wedge \neg b \wedge (a \to b) \leq 0$. Dies gilt aber wegen

$$a \wedge \neg b \wedge (a \to b) \leq b \wedge \neg b \leq 0$$

wobei die erste Ungleichung wegen $a \wedge (a \to b) \leq b$ folgt. $\square$

Warnung In nicht–booleschen Heyting–Verbänden gilt im allgemeinen nicht, daß $\neg a \vee b = a \to b$, wie man an folgendem Beispiel sieht: ist L der Verband $0 < u < 1$, dann gilt $u \to u = 1$, aber $u \vee \neg u = u$, da $\neg u = 0$.
Wenn die Gleichung $\neg a \vee b = a \to b$ in einem Heyting–Verband für alle a und b gilt, dann auch insbesondere $\neg a \vee a = a \to a = 1$, woraus folgt, daß der Verband boolesch ist.

Definition 3.6 *Sei* $(L, \leq)$ *ein Heyting–Verband. Eine* Belegung *der propositionalen Konstanten in* L *ist eine Funktion* $\rho : \mathsf{PC} \to L$. *Wir schreiben* $\mathsf{pVal}(L)$ *für die Menge aller Belegungen* $\rho : \mathsf{PC} \to L$. *Die Interpretationsfunktion*

$$[\![\cdot]\!]^L : \mathsf{PROP} \to \mathsf{pVal}(L) \to L$$

sei durch Rekursion über den Aufbau aussagenlogischer Formeln wie folgt definiert:

$$\begin{aligned}
&[\![p_n]\!]^L \rho = \rho(p_n) \\
&[\![\bot]\!]^L \rho = 0_L \\
&[\![A \wedge B]\!]^L \rho = [\![A]\!]^L \rho \wedge_L [\![B]\!]^L \rho \\
&[\![A \vee B]\!]^L \rho = [\![A]\!]^L \rho \vee_L [\![B]\!]^L \rho \\
&[\![A \to B]\!]^L \rho = [\![A]\!]^L \rho \to_L [\![B]\!]^L \rho
\end{aligned}$$

wobei 0_L *das kleinste Element in* L, $\wedge_L$ *und* $\vee_L$ *binäre Infima und Suprema in* L *und* $\to_L$ *die Heyting–Implikation in* L *bezeichnen.* $\diamondsuit$

Es sei bemerkt, daß man die Interpretationsfunktion aus Definition 2.1 als Spezialfall von Definition 3.6 erhält, indem man für L den 2–elementigen Verband $\mathsf{ff} < \mathsf{tt}$ wählt.

I.4 Der Kalkül des Natürlichen Schließens

Wenn $A_1, \ldots, A_n, B$ aussagenlogische Formeln sind, so kann man sich fragen, ob B aus den Annahmen $A_1, \ldots, A_n$ folgt. Dafür hat sich in der Logik die Notation

$$A_1, \ldots, A_n \vdash B$$

eingebürgert. Ausdrücke dieser Form heißen *Sequenzen*. Im *intuitiven* Sinne ist eine Sequenz $A_1, \ldots, A_n \vdash B$ genau dann *gültig*, wenn aus der Gültigkeit der Annahmen $A_1, \ldots, A_n$ die Gültigkeit der Konklusion B folgt. Dieser intuitive Gültigkeitsbegriff wird im nächsten Abschnitt mathematisch präzise gefaßt.
In diesem Abschnitt jedoch geben wir vorerst einen Kalkül zur Herleitung gültiger Sequenzen an, dessen Regeln sich unmittelbar aufgrund der intuitiven Bedeutung von Sequenzen rechtfertigen lassen. Weil die Regeln dieses Kalküls unmittelbar einsichtig sind und die Praxis des mathematischen Beweisens seinem Wesen nach erfassen, heißt er auch *Kalkül des Natürlichen Schließens.*

Definition 4.1 *Eine* Sequenz *ist ein Ausdruck der Form*

$$\Gamma \vdash A$$

wobei $A \in \mathsf{PROP}$ *und* Γ *eine Liste von Elementen in* PROP *ist.*
Wir nennen A *die* Konklusion *der Sequenz und* Γ *den* Kontext *der* Annahmen *bzw.* Prämissen *der Sequenz.*
Mithilfe der folgenden Regeln definieren wir induktiv die Menge der herleitbaren *Sequenzen.*

Strukturelle Regeln

$$\frac{}{\Gamma, A, \Delta \vdash A}\,(\mathrm{ax}) \qquad \frac{\Gamma, A, B, \Delta \vdash C}{\Gamma, B, A, \Delta \vdash C}\,(\mathrm{ex})$$

$$\frac{\Gamma \vdash C}{\Gamma, A \vdash C}\,(\mathrm{w}) \qquad \frac{\Gamma, A, A \vdash C}{\Gamma, A \vdash C}\,(\mathrm{c})$$

wobei (ax) *für* axiom*,* (ex) *für* exchange*,* (w) *für* weakening *und* (c) *für* contraction *steht.*

Logische Regeln

$$\frac{\Gamma \vdash A \quad \Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \wedge B}\,(\wedge I) \qquad \frac{\Gamma \vdash A_1 \wedge A_2}{\Gamma \vdash A_i}\,(\wedge E_i)$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash B}{\Gamma \vdash A \to B}\,(\to I) \qquad \frac{\Gamma \vdash A \to B \quad \Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash B}\,(\to E)$$

$$\frac{\Gamma \vdash A_i}{\Gamma \vdash A_1 \vee A_2}\,(\vee I_i) \qquad \frac{\Gamma \vdash A \vee B \quad \Gamma, A \vdash C \quad \Gamma, B \vdash C}{\Gamma \vdash C}\,(\vee E)$$

$$\frac{\Gamma \vdash \bot}{\Gamma \vdash C}\,(\bot E)$$

wobei $i \in \{1, 2\}$.
Dies sind die Regeln der intuitionistischen *oder* konstruktiven *Aussagenlogik. Die* klassische *Aussagenlogik erhält man durch Hinzunahme der Regel*

$$\frac{\Gamma \vdash \neg\neg A}{\Gamma \vdash A} \text{(raa)}$$

wobei die Abkürzung "raa" für reductio ad absurdum *steht.*
Die Regel $(\bot E)$ *wird auch oft* ex falso quodlibet *genannt.* $\Diamond$

Beachte, daß es für jeden 2-stelligen aussagenlogischen Operator $\Box$ eine *Introduktion*sregel $(\Box I)$ und eine *Elimination*sregel $(\Box E)$ gibt. Für $\bot$ jedoch gibt es bloß die Eliminationsregel $(\bot E)$.
Um uns mit der Verwendung des Kalküls des natürlichen Schließens vertraut zu machen, betrachten wir einige Beispielsherleitungen, auf die wir uns auch später immer wieder beziehen werden.

(1) $A \wedge B \vdash B \wedge A$ wird bewiesen durch

$$\dfrac{\dfrac{\overline{A\wedge B \vdash A\wedge B}\;\text{(ax)}}{A\wedge B \vdash B}\;(\wedge E_2) \qquad \dfrac{\overline{A\wedge B \vdash A\wedge B}\;\text{(ax)}}{A\wedge B \vdash A}\;(\wedge E_1)}{A\wedge B \vdash B\wedge A}\;(\wedge I)$$

(2) $\vdash A \to B \to A$ wird hergeleitet durch

$$\dfrac{\dfrac{\overline{A, B \vdash A}\;\text{(ax)}}{A \vdash B \to A}\;(\to I)}{\vdash A \to B \to A}\;(\to I)$$

(3) $(A\wedge B)\to C \vdash A\to(B\to C)$ wird bewiesen durch

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overline{\Gamma \vdash A\wedge B\to C}\;\text{(ax)} \qquad \dfrac{\overline{\Gamma \vdash A}\;\text{(ax)} \quad \overline{\Gamma \vdash B}\;\text{(ax)}}{\Gamma \vdash A\wedge B}\;(\wedge I)}{A\wedge B\to C, A, B \vdash C}\;(\to E)}{A\wedge B\to C, A \vdash B \to C}\;(\to I)}{A\wedge B\to C \vdash A \to B \to C}\;(\to I)$$

wobei $\Gamma \equiv A\wedge B\to C, A, B$

(4) $A{\to}C, B{\to}C \vdash A{\vee}B{\to}C$ wird bewiesen durch

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\Gamma\vdash A{\vee}B}\,(\mathrm{ax}) \quad \dfrac{\dfrac{}{\Gamma, A\vdash A{\to}C}\,(\mathrm{ax}) \quad \dfrac{}{\Gamma, A\vdash A}\,(\mathrm{ax})}{\Gamma, A\vdash C}\,({\to}E) \quad \dfrac{\dfrac{}{\Gamma, B\vdash B{\to}C}\,(\mathrm{ax}) \quad \dfrac{}{\Gamma, B\vdash B}\,(\mathrm{ax})}{\Gamma, B\vdash C}\,({\to}E)}{\Gamma\vdash C}\,({\vee}E)}{A{\to}C, B{\to}C \vdash A{\vee}B{\to}C}\,({\to}I)$$

wobei $\Gamma \equiv A{\to}C, B{\to}C, A{\vee}B$

(5) $A{\vee}B{\to}C \vdash (A{\to}C){\wedge}(B{\to}C)$ wird bewiesen durch

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{A{\vee}B{\to}C, A\vdash A{\vee}B{\to}C}\,(\mathrm{ax}) \quad \dfrac{\dfrac{}{A{\vee}B{\to}C, A\vdash A}\,(\mathrm{ax})}{A{\vee}B{\to}C, A\vdash A{\vee}B}\,({\vee}I_1)}{A{\vee}B{\to}C, A\vdash C}\,({\to}E)}{A{\vee}B{\to}C\vdash A{\to}C}\,({\to}I) \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{}{A{\vee}B{\to}C, B\vdash A{\vee}B{\to}C}\,(\mathrm{ax}) \quad \dfrac{\dfrac{}{A{\vee}B{\to}C, B\vdash B}\,(\mathrm{ax})}{A{\vee}B{\to}C, B\vdash A{\vee}B}\,({\vee}I_2)}{A{\vee}B{\to}C, B\vdash C}\,({\to}E)}{A{\vee}B{\to}C\vdash B{\to}C}\,({\to}I)}{A{\vee}B{\to}C\vdash (A{\to}C){\wedge}(B{\to}C)}\,({\wedge}I)$$

(6) die *Schnittregel*

$$\dfrac{\Gamma, A\vdash B \qquad \Delta\vdash A}{\Gamma, \Delta\vdash B}\,(\mathrm{cut})$$

wird hergeleitet durch

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\Gamma, A\vdash B}{\Gamma\vdash A{\to}B}\,({\to}I)}{\Gamma, \Delta\vdash A{\to}B}\,(\mathrm{str}) \quad \dfrac{\Delta\vdash A}{\Gamma, \Delta\vdash A}\,(\mathrm{str})}{\Gamma, \Delta\vdash B}\,({\to}E)$$

wobei (str) für eine u.U. mehrfache Anwendung struktureller Regeln steht

(7) als Anwendung der Regel (cut) ergibt sich die Regel

$$\dfrac{\Gamma, A, B\vdash C}{\Gamma, A{\wedge}B\vdash C}\,({\wedge}L)$$

die folgendermaßen hergeleitet werden kann

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\Gamma, A, B \vdash C}{\Gamma, B, A \vdash C}\,(\mathrm{ex}) \qquad \dfrac{\dfrac{}{A{\wedge}B \vdash A{\wedge}B}\,(\mathrm{ax})}{A{\wedge}B \vdash A}\,(\wedge E_1)}{\dfrac{\Gamma, B, A{\wedge}B \vdash C}{\Gamma, A{\wedge}B, B \vdash C}\,(\mathrm{ex})}\,(\mathrm{cut}) \qquad \dfrac{\dfrac{}{A{\wedge}B \vdash A{\wedge}B}\,(\mathrm{ax})}{A{\wedge}B \vdash B}\,(\wedge E_2)}{\dfrac{\Gamma, A{\wedge}B, A{\wedge}B \vdash C}{\Gamma, A{\wedge}B \vdash C}\,(\mathrm{c})}\,(\mathrm{cut})$$

(8) als Übung(!) leite man folgende Schlußregeln mithilfe von (cut) her

$$\dfrac{\Gamma, A \vdash C \qquad \Gamma, B \vdash C}{\Gamma, A{\vee}B \vdash C}\,(\vee L) \qquad\qquad \dfrac{\Gamma \vdash A \qquad \Gamma, B \vdash C}{\Gamma, A{\to}B \vdash C}\,(\to L)$$

(9) das Prinzip $\vdash A{\vee}\neg A$ (*tertium non datur*) wird bewiesen durch

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\neg A \wedge \neg\neg A \vdash \neg A \wedge \neg\neg A}\,(\mathrm{ax})}{\neg A \wedge \neg\neg A \vdash \neg\neg A}\,(\wedge E_2) \qquad \dfrac{\dfrac{}{\neg A \wedge \neg\neg A \vdash \neg A \wedge \neg\neg A}\,(\mathrm{ax})}{\neg A \wedge \neg\neg A \vdash \neg A}\,(\wedge E_1)}{\neg A \wedge \neg\neg A \vdash \bot}\,(\to E) \qquad \dfrac{}{\neg(A{\vee}\neg A) \vdash \neg A \wedge \neg\neg A}\,(5)}{\dfrac{\neg(A{\vee}\neg A) \vdash \bot}{\dfrac{\vdash \neg\neg(A{\vee}\neg A)}{\vdash A{\vee}\neg A}\,(\mathrm{raa})}\,(\to\mathrm{I})}\,(\mathrm{cut})$$

Als Übung(!) leite man die Regel (raa) aus der Regel *tertium non datur* her!

Als Abschluß dieses Abschnitts diskutieren wir, wie die Regel (raa) mit dem Begriff des *indirekten Beweises* zusammenhängt. Wenn ein Mathematiker A indirekt beweist, so nimmt er $\neg A$ an und leitet daraus einen Widerspruch $\bot$ her, was durch folgenden Herleitungsbaum veranschaulicht wird

$$\dfrac{\dfrac{\Gamma, \neg A \vdash \bot}{\Gamma \vdash \neg\neg A}\,(\to I)}{\Gamma \vdash A}\,(\mathrm{raa})$$

Man beachte jedoch, daß die Herleitung

$$\dfrac{\Gamma, A \vdash \bot}{\Gamma \vdash \neg A}\,(\to I)$$

kein indirekter Beweis ist sondern, ein *direkter* Beweis einer Negation.

I.5 Korrektheit des Kalküls des Natürlichen Schließens

Wir definieren zuerst mathematisch präzise, wann eine Sequenz gültig ist.

Im weiteren schreiben wir oft einfach L anstatt $(L, \leq)$, wenn wir über Verbände (oder allgemeiner Ordnungen) sprechen.

Definition 5.1 *Sei L ein Heyting–Verband und $\rho \in \mathsf{pVal}(L)$.*
Eine Sequenz $A_1, \dots, A_n \vdash B$ heißt gültig in L unter ρ *genau dann, wenn*

$$[\![A_1]\!]^L \rho \wedge_L \dots \wedge_L [\![A_n]\!]^L \rho \leq [\![B]\!]^L \rho$$

wofür wir abkürzend

$$A_1, \dots, A_n \models_{L,\rho} B$$

schreiben.
Ein solches Paar (L, ρ) heißt ein Modell der intuitionistischen Aussagenlogik*.*
Wenn L boolesch ist, dann heißt (L, ρ) ein Modell der klassischen Aussagenlogik*, und wenn L der 2–elementige Verband $\mathbb{B} = \{\mathsf{tt}, \mathsf{ff}\}$ ist, dann nennen wir ρ ein* 2–wertiges Modell. ◊

Die intuitionistische bzw. klassische Aussagenlogik besitzt also sehr viele verschiedene Modelle, nämlich so viele wie es Heyting– bzw. boolesche Verbände und Belegungen in ihnen gibt. Insbesondere gibt es so viele 2–wertige Modelle wie Teilmengen von $\mathbb{N}$ (aufgrund der Bijektion zwischen Teilmengen und charakteristischen Funktionen).

Relativ zu dem Gültigkeitsbegriff aus Definition 5.1 können wir die Korrektheit des Kalküls des Natürlichen Schließens beweisen.

Theorem 5.2 (Korrektheitssatz für die Aussagenlogik)
Wenn eine Sequenz $\Gamma \vdash A$ in der intuitionistischen Aussagenlogik herleitbar ist, dann gilt

$$\Gamma \models_{L,\rho} A$$

für alle Heyting–Verbände L und alle Belegungen $\rho \in \mathsf{pVal}(L)$. Intuitionistisch herleitbare Sequenzen gelten also in allen Modellen.
Ebenso gelten alle klassisch herleitbaren Sequenzen in allen klassischen Modellen der Aussagenlogik, insbesondere also in allen 2–wertigen Modellen.

Beweis: Da die herleitbaren Sequenzen der intuitionistischen bzw. klassischen Aussagenlogik induktiv definiert sind, genügt es zu zeigen, daß die Menge der in allen intuitionistischen bzw. klassischen Modellen gültigen Sequenzen unter den Regeln der intuitionistischen bzw. klassischen Aussagenlogik abgeschlossen sind. Tatsächlich werden wir eine etwas stärkere Aussage beweisen, daß nämlich für jedes Modell (L, ρ) und jede Regel

$$\frac{S_1 \ \dots \ S_n}{S}$$

der intuitionistischen bzw. klassischen Aussagenlogik gilt, daß S im Modell (L, ρ) gilt, falls alle Prämissen S_i in (L, ρ) gelten.
Sei also L ein Heyting–Verband und $\rho{\in}\mathsf{pVal}(L)$. Wenn $\Gamma \equiv A_1, \ldots, A_n$, so schreiben wir zur Vereinfachung der Notation einfach $[\![\Gamma]\!]$ für $[\![A_1]\!]^L\rho \wedge \ldots [\![A_n]\!]^L\rho$. Wir weisen nun die eben erwähnte Erhaltungseigenschaft für alle Regeln nach.
Der Fall der strukturellen Regeln ist trivial. Zur Illustration behandeln wir die Fälle (ax) und (w). Es gilt immer, daß

$$[\![\Gamma]\!] \wedge [\![A]\!] \wedge [\![\Delta]\!] \leq [\![A]\!]$$

und somit erhält die Regel (ax) die Gültigkeit von Sequenzen im Modell (L, ρ). Angenommen $[\![\Gamma]\!] \leq [\![C]\!]$, dann auch $[\![\Gamma]\!]{\wedge}[\![A]\!] \leq [\![C]\!]$, woraus die Korrektheit der Regel (w) folgt. Die Korrektheit der Regeln (ex) und (c) folgt unmittelbar aus der Kommutativität und Idempotenz[4] von $\wedge$.
$({\to}I)$ Wenn $[\![\Gamma]\!]{\wedge}[\![A]\!] = [\![\Gamma, A]\!] \leq [\![B]\!]$, dann auch $[\![\Gamma]\!] \leq [\![A]\!]{\to}[\![B]\!] = [\![A{\to}B]\!]$ aufgrund der definierenden Eigenschaft der Heyting–Implikation.
$({\to}E)$ Wenn $[\![\Gamma]\!] \leq [\![A{\to}B]\!] = [\![A]\!]{\to}[\![B]\!]$ und $[\![\Gamma]\!] \leq [\![A]\!]$, dann gilt auch $[\![\Gamma]\!] \leq ([\![A]\!]{\to}[\![B]\!]){\wedge}[\![A]\!] \leq [\![B]\!]$.
Die Introduktions– und Eliminationsregeln für $\wedge$ sowie die Introduktionsregeln für $\vee$ sind einfach und darum dem Leser als Übung überlassen.
$({\vee}E)$ Angenommen die Prämissen der Eliminationsregel für $\vee$ gelten in (L, ρ), d.h.

$$\begin{array}{ll}
\text{(i)} & [\![\Gamma]\!] \leq [\![A{\vee}B]\!] = [\![A]\!]{\vee}[\![B]\!] \\
\text{(ii)} & [\![\Gamma]\!]{\wedge}[\![A]\!] = [\![\Gamma, A]\!] \leq [\![C]\!] \\
\text{(iii)} & [\![\Gamma]\!]{\wedge}[\![B]\!] = [\![\Gamma, B]\!] \leq [\![C]\!]
\end{array}$$

Wir schreiben g, a, b, c abkürzend für $[\![\Gamma]\!]$, $[\![A]\!]$, $[\![B]\!]$, $[\![C]\!]$. Um die Korrektheit der Eliminationsregel für $\vee$ nachzuweisen, müssen wir zeigen, daß $[\![\Gamma]\!] \leq [\![C]\!]$, d.h. $g \leq c$. Dies ist aber leicht aufgrund des in Heyting–Verbänden geltenden Distributivgesetzes wie folgt einzusehen

$$g \leq (a{\vee}b){\wedge}(a{\to}c){\wedge}(b{\to}c) \leq (a{\wedge}(a{\to}c)){\vee}(b{\wedge}(b{\to}c)) \leq c{\vee}c = c$$

da $g \leq a{\vee}b$, $g \leq a{\to}c$, $g \leq b{\to}c$ aufgrund der Annahmen (i),(ii),(iii) gelten.
$({\perp}E)$ Wenn $[\![\Gamma]\!] \leq [\![\perp]\!] = 0$, dann auch $[\![\Gamma]\!] \leq [\![A]\!]$, da $0 \leq [\![A]\!]$.
(raa) Angenommen L ist boolesch und $[\![\Gamma]\!] \leq [\![\neg\neg A]\!] = \neg\neg[\![A]\!]$. Dann gilt auch $[\![\Gamma]\!] \leq [\![A]\!]$, da $[\![A]\!] = \neg\neg[\![A]\!]$, weil L voraussetzungsgemäß boolesch ist. $\square$

[4] d.h. $a{\wedge}_L a = a$ für alle $a \in L$

I.6 Vollständigkeit des Kalküls des natürlichen Schließens

Wir werden für die intuitionistische und die klassische Variante des Kalküls des natürlichen Schließens ein *klassifizierendes* Modell konstruieren, in dem eine Sequenz genau dann gilt, wenn sie herleitbar ist (vgl. klassifizierendes Modell für Gleichungstheorien in der Allgemeinen Algebra Vorlesung!).
Zuerst zeigen wir einen technischen Hilfssatz.

Lemma 6.1 *Die Sequenz $\Gamma, A \wedge B \vdash C$ ist genau dann herleitbar, wenn die Sequenz $\Gamma, A, B \vdash C$ herleitbar ist. Somit ist eine Sequenz $A_1 \wedge \ldots \wedge A_n \vdash C$ genau dann herleitbar, wenn $A_1, \ldots, A_n \vdash C$ herleitbar ist.*

Beweis: Wenn $\Gamma, A \wedge B \vdash C$ herleitbar ist, dann aber auch $\Gamma, A, B \vdash C$, wie man an folgender Herleitung sieht.

$$\dfrac{\Gamma, A \wedge B \vdash C \qquad \dfrac{\dfrac{}{A, B \vdash A}\,(\mathrm{ax}) \qquad \dfrac{}{A, B \vdash B}\,(\mathrm{ax})}{A, B \vdash A \wedge B}\,(\wedge I)}{\Gamma, A, B \vdash C}\,(\mathrm{cut})$$

Die Rückrichtung wurde in Beispiel 7 von Abschnitt I.4 bewiesen.

Der zweite Teil der Behauptung ergibt sich durch iterierte Anwendung dessen, was wir eben bewiesen haben. □

Als nächstes definieren wir auf PROP eine Präordnung $\preceq$ (reflexiv und transitiv) vermittels $\vdash$, sodaß $\mathsf{PROP}_{/\preceq}$ ein Heyting–Verband bzw. boolescher Verband wird.

Theorem 6.2 *Es gelte $A \preceq B$ genau dann, wenn $A \vdash B$ im intuitionistischen bzw. klassischen Kalkül des natürlichen Schließens herleitbar ist. Für die so definierte Relation $\preceq$ gelten folgende Eigenschaften:*

(i) *Die Relation $\preceq \; \subseteq \mathsf{PROP} \times \mathsf{PROP}$ ist reflexiv und transitiv, aber nicht antisymmetrisch. Weiters gilt*

(a)	$C \preceq A$ *und* $C \preceq B$	$\iff$	$C \preceq A \wedge B$
(b)	$A \preceq C$ *und* $B \preceq C$	$\iff$	$A \vee B \preceq C$
(c)	$C \wedge A \preceq B$	$\iff$	$C \preceq A \to B$
(d)	$\bot \preceq A$		
(e)	$A \preceq \top$ *wobei* $\top \equiv p_0 \to p_0$		

(ii) *Die partielle Ordnung*[5] $\mathsf{PROP}_{/\preceq}$ *ist ein Heyting–Verband bzw. ein boolescher Verband je nachdem, ob* $\vdash$ *sich auf Herleitbarkeit im intuitionistischen oder klassischen Kalkül des Natürlichen Schließens bezieht. Dabei werden endliche Infima und Suprema sowie die Heyting–Implikation konkret wie folgt konstruiert*

$$\begin{array}{rcl} [A] \wedge [B] & = & [A \wedge B] \\ [A] \vee [B] & = & [A \vee B] \\ [A] \to [B] & = & [A \to B] \\ 0 & = & [\bot] \\ 1 & = & [\top] \end{array}$$

wobei $\top$ *wiederum als Abkürzung für* $p_0 \to p_0$ *steht und* $[A]$ *und* $[B]$ *die Äquivalenzklassen von* A *und* B *bzgl. der durch* $\preceq$ *induzierten Äquivalenzrelation bezeichnen.*

Beweis: Zuerst zeigen wir (i). Reflexivität und Transitivität seien dem Leser als leichte Übung überlassen.
(a) Wenn $C \vdash A$ und $C \vdash B$ herleitbar sind, so auch $C \vdash A \wedge B$ mit $(\wedge I)$. Wenn $C \vdash A \wedge B$ herleitbar ist, so auch $C \vdash A$ und $C \vdash B$ mithilfe der Regeln $(\wedge E_1)$ und $(\wedge E_2)$.
(b) Wenn $A \vdash C$ und $B \vdash C$ herleitbar sind, so ist auch $A \vee B \vdash C$ herleitbar wie folgende Herleitung zeigt

$$\dfrac{\dfrac{}{A \vee B \vdash A \vee B}\,(\mathrm{ax}) \quad \dfrac{A \vdash C}{A \vee B, A \vdash C}\,(\mathrm{str}) \quad \dfrac{B \vdash C}{A \vee B, B \vdash C}\,(\mathrm{str})}{A \vee B \vdash C}\,(\vee E)$$

Wenn $A \vee B \vdash C$ herleitbar ist, dann auch $A \vdash C$ und $B \vdash C$ (durch Schnitt mit den herleitbaren Sequenzen $A \vdash A \vee B$ bzw. $B \vdash A \vee B$).
(c) Wenn $C \wedge A \vdash B$, dann auch $C \vdash A \to B$ mit $(\to I)$. Wenn andererseits $C \vdash A \to B$ herleitbar ist, dann auch $C \wedge A \vdash B$, wie man aufgrund folgender Herleitung sieht.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{C \vdash A \to B}{C, A \vdash A \to B}\,(\mathrm{w}) \quad \dfrac{}{C, A \vdash A}\,(\mathrm{ax})}{C, A \vdash B}\,(\to E)}{C \wedge A \vdash B}\,(\wedge L)$$

[5] Die zugrundeliegende Menge von $\mathsf{PROP}_{/\preceq}$ ist $\mathsf{PROP}_{/\sim}$, wobei $\sim$ die Äquivalenzrelation ist, wo $A \sim B$ genau dann, wenn $A \preceq B$ und $B \preceq A$. Die partielle Ordnung auf $\mathsf{PROP}_{/\sim}$ ist gegeben durch $[A] \leq [B]$ genau dann, wenn $A \preceq B$.
Offenbar ist diese Konstruktion einer partiellen Ordnung aus einer Präordnung auch im allgemeinen Fall möglich!

(d) $\bot \vdash A$ folgt mit ($\bot$E) aus $\bot \vdash \bot$, was wiederum mit (ax) folgt.
(e) $A \vdash p_0{\to}p_0$ folgt mit $({\to}I)$ aus $A, p_0 \vdash p_0$, was wiederum mit (ax) folgt.

(ii) Die fünf behaupteten Gleichungen folgen unmittelbar aus den obigen Eigenschaften (a)–(e), aus denen auch folgt, daß $\mathsf{PROP}_{/\preceq}$ ein Heyting–Verband ist. Im dem Falle, daß $\vdash$ sich auf klassische Herleitbarkeit bezieht, ist $\mathsf{PROP}_{/\preceq}$ ein boolescher Verband, da $\neg\neg[A] = [\neg\neg A] \leq [A]$, da $\neg\neg A \vdash A$ mit (raa) aus $\neg\neg A \vdash \neg\neg A$ folgt, was wiederum aus (ax) folgt. $\square$

Es sei bemerkt, daß die Präordnung $\preceq$ nicht antisymmetrisch ist, da für alle $A, B \in \mathsf{PROP}$ z.B. gilt, daß $A{\to}A \dashv\vdash B{\to}B$ und $A{\wedge}\neg A \dashv\vdash B{\wedge}\neg B$ herleitbar sind.
Der Verband $\mathsf{PROP}_{/\preceq}$ wird traditionellerweise als *Lindenbaum–Tarski–Algebra* der intuitionistischen bzw. klassischen Logik bezeichnet.

Theorem 6.3 (Vollständigkeit der Aussagenlogik)
Sei $\mathcal{L}$ die Lindenbaum–Tarski–Algebra $\mathsf{PROP}_{/\preceq}$ *der intuitionistischen bzw. klassischen Logik. Das* klassifizierende *oder* generische Modell *sei definiert als* $(\mathcal{L}, \rho_0)$, *wobei* $\rho_0(p_n) = [p_n]$. *Dann gilt*

(1) $[\![A]\!]^{\mathcal{L}}\rho_0 = [A]$ *für jedes* $A \in \mathsf{PROP}$

(2) *eine Sequenz* $\Gamma \vdash A$ *ist im intuitionistischen bzw. klassischen Kalkül des natürlichen Schließens genau dann herleitbar, wenn* $\Gamma \models_{\mathcal{L},\rho_0} A$, *d.h. wenn* $\Gamma \vdash A$ *im klassifizierenden Modell gilt.*

Beweis: (1) zeigt man leicht durch Induktion über den Aufbau aussagenlogischer Formeln mithilfe Theorem 6.2(ii), wobei der Basisfall durch die Setzung $\rho_0(p_n) = [p_n]$ abgedeckt wird.
(2) Wenn $\Gamma \vdash A$ herleitbar ist, so gilt sie im klassifizierenden Modell aufgrund des Korrektheitssatzes Theorem 5.2. Wenn andererseits $A_1, \ldots, A_n \models_{\mathcal{L},\rho_0} B$, d.h. $[\![A_1]\!]^{\mathcal{L}}\rho_0 \wedge \ldots \wedge [\![A_n]\!]^{\mathcal{L}}\rho_0 \leq [\![B]\!]^{\mathcal{L}}\rho_0$, dann gilt wegen (1), daß $[A_1] \wedge \ldots \wedge [A_n] \leq [B]$, und somit wegen Theorem 6.2(ii), daß $[A_1 \wedge \ldots \wedge A_n] \leq [B]$. Also ist aufgrund der Definition von $\preceq$ die Sequenz $A_1 \wedge \ldots \wedge A_n \vdash B$ herleitbar und somit wegen Lemma 6.1 auch die Sequenz $A_1, \ldots, A_n \vdash B$. $\square$

I.7 Vollständigkeit der klassischen Aussagenlogik bzgl. 2–wertiger Modelle

Wir wissen aus dem vorhergehenden Abschnitt, daß eine herleitbare Sequenz in allen 2–wertigen Modellen $\rho : \mathsf{PC}{\to}\mathbb{B}$ gilt (da sie ja in allen booleschen Modellen gilt). Für den Fall der *klassischen* Aussagenlogik läßt sich dies umkehren: wenn eine Sequenz in allen 2–wertigen Modellen gilt, so ist sie auch im Kalkül des Natürlichen Schließens unter Verwendung der Regel (raa) herleitbar.

Zu diesem Zweck zeigen wir zuerst, daß 2–wertige Modelle in 1–1–Korrespondenz zu Verbandshomomorphismen[6] von $\mathcal{L}_{\mathrm{cl}}$ nach $\mathbb{B}$ stehen, wobei $\mathcal{L}_{\mathrm{cl}}$ die Lindenbaum–Tarski–Algebra für die klassische Aussagenlogik und $\mathbb{B}$ der 2-elementige Verband ($\mathsf{ff}<\mathsf{tt}$) ist.

Zu diesem Zweck benötigen wir aber vorab folgendes Lemma.

Lemma 7.1 *Sei B ein boolescher Verband und $f\colon B\to\mathbb{B}$ eine Funktion, die endliche Infima und das kleinste Element erhält. Dann sind folgende Aussagen äquivalent*

(1) *f erhält endliche Suprema*

(2) *$f(\neg a) = \neg f(a)$ für alle $a \in B$.*

Beweis: Aufgrund der Voraussetzungen über f gilt

$$f(a)\wedge f(\neg a) = f(a\wedge\neg a) = f(0) = \mathsf{ff} \quad .$$

Wenn f endliche Suprema erhält, dann gilt $f(a)\vee f(\neg a) = f(a\vee\neg a) = f(1) = \mathsf{tt}$ und somit auch $\neg f(a) = f(\neg a)$.
Wenn andererseits f die Negation erhält, d.h. $f(\neg a) = \neg f(a)$ für alle $a{\in}B$, dann erhält f auch $\vee$, da

$$f(a\vee b) = f(\neg(\neg a\wedge\neg b)) = \neg(\neg f(a)\wedge\neg f(b)) = f(a)\vee f(b) \quad ,$$

und $f(1) = f(\neg 0) = \neg f(0) = \neg\mathsf{ff} = \mathsf{tt}$. □

Also erhalten Verbandshomomorphismen von einem booleschen Verband B nach dem 2–elementigen booleschen Verband $\mathbb{B}$ die Negation und somit auch die Implikation, also die gesamte logische Struktur.

Wir zeigen nun wie bereits angekündigt, daß Verbandshomorphismen von $\mathcal{L}_{\mathrm{cl}}$ nach $\mathbb{B}$ genau den Belegungen der propositionalen Konstanten in $\mathbb{B}$ entsprechen.

Lemma 7.2 *Jede 2–wertige Belegung $\rho : \mathsf{PC}\to\mathbb{B}$ läßt sich eindeutig zu einem Verbandshomomorphismus*

$$h_\rho : \mathcal{L}_{\mathrm{cl}}\to\mathbb{B} : [A] \mapsto [\![A]\!]\rho$$

fortsetzen. Außerdem gilt für jeden Verbandshomomorphismus $h : \mathcal{L}_{\mathrm{cl}}\to\mathbb{B}$, daß $h{=}h_\rho$ für die Belegung ρ mit $\rho(p_n){=}h([p_n])$.

[6] Eine Abbildung zwischen Verbänden heißt Verbandshomomorphismus genau dann, wenn sie endliche Suprema und Infima erhält, d.h. wenn sie 0 und 1 und $\vee$ und $\wedge$ erhält.

Beweis: Für $\rho \in \mathsf{pVal}$ ist h_ρ wohldefiniert, da aufgrund des Korrektheitssatzes Theorem 5.2 aus $A \vdash B$ folgt, daß $[\![A]\!]\rho \leq [\![B]\!]\rho$. Die Funktion h_ρ ist ein Verbandshomomorphismus aufgrund von Theorem 6.2(ii).
Wenn $h : \mathcal{L}_{\mathrm{cl}} \to \mathbb{B}$ ein Verbandshomomorphismus ist, so zeigt man leicht durch Induktion über den Aufbau von A, daß $h([A]) = [\![A]\!]\rho$ für ρ mit $\rho(p_n) = h([p_n])$. Für den Fall der Implikation verwende man, daß h die Implikation erhält, was wie oben bemerkt unmittelbar aus Lemma 7.1 folgt.
Also ist h_ρ für eine beliebige Belegung $\rho \in \mathsf{pVal}$ die eindeutige Fortsetzung von ρ zu einem Verbandshomomorphismus und jeder Verbandshomomorphismus von $\mathcal{L}_{\mathrm{cl}}$ nach $\mathbb{B}$ entsteht eindeutig auf diese Weise. $\square$

Für die Vollständigkeit der klassischen Aussagenlogik bzgl. 2–wertiger Modelle genügt es zu zeigen, daß in *abzählbare*n booleschen Verbänden B ein $x \in B$ genau dann von allen Verbandshomomorphismen $h: B \to \mathbb{B}$ auf tt geschickt wird, wenn x das größte Element von B ist. Die Vollständigkeit bzgl. 2–wertiger Modelle folgt dann unmittelbar, indem man B durch die Lindenbaum–Tarski–Algebra für die klassische Aussagenlogik instanziiert.

Zur Vorbereitung benötigen wir allerdings ein paar Lemmata, die Verbandshomomorphismen von booleschen Verbänden B nach $\mathbb{B}$ charakterisieren.
Die Funktionen von B nach $\mathbb{B}$ sind gerade die charakteristischen Funktionen der Teilmengen von B.[7] Im nächsten Lemma charakterisieren wir diejenigen Teilmengen von B, deren charakteristische Funktion ein Verbandshomomorphismus ist.

Definition 7.3 *Sei B ein boolescher Verband. Eine Teilmenge $F \subseteq B$ heißt* maximal*, wenn $b \in F$ oder $\neg b \in F$ für alle $b \in B$, und* endlich konsistent*, wenn alle Infima endlicher Teilmengen von F verschieden von 0 sind.* $\Diamond$

Beachte, daß auch B selbst "maximal" im Sinne dieser Definition ist. Es gibt aber auch "maximale" Teilmengen von B, die nicht maximal im ordnungstheoretischen Sinn bzgl. $\subseteq$ sind, nämlich typischerweise solche "maximalen" Teilmengen von B, die auch endlich konsistent sind. Solche Teilmengen sind aber geschickterweise die bzgl. $\subseteq$ maximalen endlich konsistenten Teilmengen. Der "vernünftige" Begriff ist also "maximal und endlich konsistent". Jedoch werden später beim Nachweise dieser Eigenschaft die Eigenschaften "maximal" und "endlich konsistent" getrennt voneinander in Sinne von Definition 7.3 nachgewiesen.

Lemma 7.4 *Sei B ein boolescher Verband. Eine beliebige Funktion $f: B \to \mathbb{B}$ ist genau dann ein Verbandshomomorphismus, wenn die Menge $f^{-1}(\mathsf{tt})$ maximal und endlich konsistent ist.*

[7] Zur Erinnerung: $c : B \to \mathbb{B}$ ist die *charakteristische Funktion* von $X \subseteq B$ genau dann, wenn $x \in X \Leftrightarrow c(x) = \mathsf{tt}$ für alle $x \in B$.

Beweis: Angenommen $h\colon B \to \mathbb{B}$ ist ein Verbandshomomorphismus. Wir zeigen, daß die Menge $F := h^{-1}(\mathsf{tt})$ maximal und endlich konsistent ist. Für $x \in B$ gilt

$$\mathsf{tt} = h(1) = h(x \vee \neg x) = h(x) \vee h(\neg x)$$

und somit ist $h(x)$ oder $h(\neg x)$ gleich tt. Wenn $x_1, \ldots, x_n \in F$, d.h. $h(x_i) = \mathsf{tt}$ für $i = 1, .., n$, dann ist $x_1 \wedge \ldots \wedge x_n \in F$, da

$$h(x_1 \wedge \ldots \wedge x_n) = h(x_1) \wedge \ldots \wedge h(x_n) = \mathsf{tt} \wedge \ldots \wedge \mathsf{tt} = \mathsf{tt}$$

weil h als Verbandshomomorphismus endliche Infima erhält.
Sei andererseits $f\colon B \to \mathbb{B}$ eine Funktion, sodaß $F := f^{-1}(\mathsf{tt})$ maximal und endlich konsistent ist. Wir zeigen, daß f ein Verbandshomomorphismus ist. Da F endlich konsistent ist, ist 0 kein Element von F und somit $f(0) = \mathsf{ff}$. Sei $x \in F$. Dann können nicht x und $\neg x$ gleichzeitig in F sein, da ansonsten $0 = x \wedge \neg x \in F$. Aufgrund der Maximalität von F muß aber x oder $\neg x$ in F sein. Somit $\neg x \in F$ genau dann, wenn $x \notin F$ und somit $f(\neg x) = \neg f(x)$. Also ist $f(1) = \mathsf{tt}$, da $f(0) = \mathsf{ff}$. Wegen Lemma 7.1 ist f nun genau dann ein Verbandshomomorphismus, wenn f binäre Infima erhält. Seien $x_1, x_2 \in B$. Wir zeigen, daß $f(x_1 \wedge x_2) = \mathsf{tt}$ genau dann, wenn $f(x_1) = \mathsf{tt} = f(x_2)$, d.h. $f(x_1 \wedge x_2) = f(x_1) \wedge f(x_2)$. Wenn $f(x_1)$ und $f(x_2)$ beide gleich tt sind, d.h. $x_1, x_2 \in F$, dann ist auch $x_1 \wedge x_2 \in F$, da andernfalls $\neg(x_1 \wedge x_2) \in F$ (weil f maximal ist) und somit $0 = x_1 \wedge x_2 \wedge \neg(x_1 \wedge x_2) \in F$ im Widerspruch zur endlichen Konsistenz von F, also $f(x_1 \wedge x_2) = \mathsf{tt}$. Wenn andererseits $f(x_1 \wedge x_2) = \mathsf{tt}$, d.h. $x_1 \wedge x_2 \in F$, dann gilt für $i = 1, 2$, daß $\neg x_i \notin F$, weil sonst $0 = \neg x_i \wedge x_1 \wedge x_2 \in F$, und somit $x_i \in F$, d.h. $f(x_i) = \mathsf{tt}$. □

Lemma 7.5 *Sei F eine endlich konsistente Teilmenge eines booleschen Verbands B und x ein Element von B. Dann ist $F \cup \{x\}$ oder $F \cup \{\neg x\}$ endlich konsistent.*

Beweis: Wenn weder $F \cup \{x\}$ noch $F \cup \{\neg x\}$ endlich konsistent sind, dann gibt es endliche Mengen $A_0, A_1 \subseteq F$, sodaß $\inf(A_0 \cup \{x\}) = 0 = \inf(A_1 \cup \{\neg x\})$, d.h. $a_0 \wedge x = 0 = a_1 \wedge \neg x$, wobei $a_i := \inf(A_i)$. Beachte, daß $a_0 \wedge a_1 = \inf(A_0 \cup A_1) \neq 0$, weil F endlich konsistent und $A_0 \cup A_1$ eine endliche Teilmenge von F ist. Andererseits gilt aber

$$a_0 \wedge a_1 = a_0 \wedge a_1 \wedge (x \vee \neg x) = (a_0 \wedge a_1 \wedge x) \vee (a_0 \wedge a_1 \wedge \neg x) = 0 \vee 0 = 0$$

Also muß eine der beiden Mengen $F \cup \{x\}$ und $F \cup \{\neg x\}$ endlich konsistent sein. □

Wir zeigen nun, daß sich endlich konsistente Teilmengen abzählbarer boolescher Verbände zu maximalen solchen vervollständigen lassen.

Lemma 7.6 *Sei B ein abzählbarer boolscher Verband. Dann gibt es zu jeder endlich konsistenten Teilmenge T von B eine maximale endlich konsistente Teilmenge F von B mit $T \subseteq F$.*

Beweis: Sei $b_0, \ldots, b_n, \ldots$ eine Aufzählung der Elemente von B. Wir konstruieren eine aufsteigende Folge endlich konsistenter Teilmengen F_n wie folgt: $F_0 = T$ und $F_{n+1} = F_n \cup \{b_n\}$, falls $F_n \cup \{b_n\}$ endlich konsistent ist, und $F_{n+1} = F_n \cup \{\neg b_n\}$ sonst. Wir zeigen mit Induktion über n, daß alle F_n endlich konsistent sind. Offensichtlich ist F_0 endlich konsistent, da T nach Annahme endlich konsistent ist. Wenn F_n endlich konsistent ist, dann ist aufgrund von Lemma 7.5 die Menge $F_n \cup \{\neg b_n\}$ endlich konsistent, falls $F_n \cup \{b_n\}$ nicht endlich konsistent sein sollte. Die Menge $F := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n$ ist endlich konsistent, da jede endliche Teilmenge von F bereits in einem F_n enthalten sein muß und deshalb ihr Infimum verschieden von 0 sein muß. Außerdem ist F maximal, da für jede natürliche Zahl n entweder b_n oder $\neg b_n$ in F_n und somit in F ist. $\square$

Korollar 7.7 *Sei B ein abzählbarer boolscher Verband und $x \in B$. Wenn $h(x) =$ tt für alle Verbandshomomorphismen $h\colon B \to \mathbb{B}$, dann ist x das größte Element in B.*

Beweis: Angenommen alle Verbandshomomorphismen von B nach $\mathbb{B}$ schicken x auf tt. Dann ist x aufgrund von Lemma 7.4 in allen maximalen endlich konsistenten Teilmengen von B als Element enthalten. Wenn nun x verschieden von 1 ist, dann ist $\neg x$ verschieden von 0 und somit die Menge $\{\neg x\}$ endlich konsistent. Aufgrund von Lemma 7.6 gibt es dann eine maximale endlich konsistente Teilmenge F von B mit $\neg x \in F$. Da aber auch $x \in F$, kann F nicht endlich konsistent sein. Also muß x gleich 1 sein. $\square$

Nun können wir relativ mühelos die Vollständigkeit bzgl. 2–wertiger Modelle beweisen.

Theorem 7.8 (Vollständigkeit bzgl. 2–wertiger Modelle)
Wenn eine Sequenz in allen 2–wertigen Modellen gilt, so ist sie auch im klassischen Kalkül des Natürlichen Schließens herleitbar.

Beweis: Angenommen eine Formel A gilt in allen 2–wertigen Modellen, d.h. $[\![A]\!]\rho = \mathsf{tt}$ für alle Belegungen $\rho \in \mathsf{pVal}$. Dann gilt aber aufgrund von Lemma 7.2, da $\mathcal{L}_{\mathrm{cl}}$ abzählbar ist, daß $h([A]) = \mathsf{tt}$ für alle Verbandshomomorphismen $h\colon \mathcal{L}_{\mathrm{cl}} \to \mathbb{B}$. Daraus folgt mit Korollar 7.7, daß $[A] = [\top]$. Also ist $\top \vdash A$ und somit auch $\vdash A$ im klassischen Kalkül des Natürlichen Schließens herleitbar.
Wenn die Sequenz $A_1, \ldots, A_n \vdash B$ in allen 2–wertigen Modellen gilt, dann gilt auch die Sequenz $\vdash A_1 \to \ldots \to A_n \to B$ in allen 2–wertigen Modellen. Also ist die Sequenz $\vdash A_1 \to \ldots \to A_n \to B$ und somit auch die Sequenz $A_1, \ldots, A_n \vdash B$ im klassischen Kalkül des Natürlichen Schließens herleitbar. $\square$

Es sei bemerkt, daß man die Vollständigkeit der klassischen Aussagenlogik bzgl. 2–wertiger Modelle auch direkt beweisen kann. Wir haben jedoch den Umweg über Lemma 7.6 gewählt, da daraus auch der im nächsten Abschnitt behandelte Kompaktheitsatz für die klassischen Aussagenlogik folgt.

Zum Abschluß dieses Abschnitts skizzieren wir noch kurz den direkten Beweis für die Vollständigkeit der klassischen Aussagenlogik bzgl. 2–wertiger Modelle. Jede aussagenlogische Formel ist beweisbar äquivalent zu einer Konjunktion von sogenannten *Klauseln*, d.h. Disjunktionen von Literalen, wobei ein *Literal* eine negierte oder unnegierte propositionale Konstante ist. Offenbar gilt eine Konjunktion aber in allen 2–wertigen Modellen genau dann, wenn alle ihre Konjunktionsglieder in allen 2–wertigen Modellen gelten. Wenn aber eine Klausel in allen 2–wertigen Modellen gilt, so enthält sie als Glieder die Literale p und $\neg p$ für eine propositionale Konstante p. Solche Disjunktionen lassen sich aber klassisch herleiten, da $p \vee \neg p$ klassisch herleitbar ist.
Die Details seien dem geneigten Leser als Übung(!) überlassen.

I.8 Kompaktheitssatz für die klassische Aussagenlogik

Wir definieren zuerst, was es heißt, daß eine Menge aussagenlogischer Formeln erfüllbar ist.

Definition 8.1 *Eine Menge $\mathcal{T}$ aussagenlogischer Formeln ist genau dann* erfüllbar*, wenn es ein $\rho \in \mathsf{pVal}$ gibt, sodaß $[\![A]\!]\rho = \mathsf{tt}$ für alle $A \in \mathcal{T}$.* $\Diamond$

Also ist eine Menge $\mathcal{T}$ aussagenlogischer Formeln, d.h. eine *aussagenlogische Theorie*, erfüllbar genau dann, wenn es ein 2–wertiges Modell $\rho : \mathsf{PC} \to \mathbb{B}$ gibt, das alle Formeln in $\mathcal{T}$ wahr macht.
Der folgende Kompaktheitssatz besagt, daß eine aussagenlogische Theorie $\mathcal{T}$ bereits dann erfüllbar ist, wenn alle endlichen Teilmengen von $\mathcal{T}$ erfüllbar sind. Dies ist insofern nicht trivial, als es nicht offensichtlich ist, wie man die verschiedenen Belegungen, die endliche Teilmengen von $\mathcal{T}$ erfüllen, zu einer Belegung "zusammenkleben" soll, die alle Formeln in $\mathcal{T}$ wahrmacht, da die verschiedenen Belegungen, die verschiedene endliche Teilmengen von $\mathcal{T}$ wahr machen, in dem Sinne inkompatibel sein können, daß sie derselben propositionalen Konstanten verschiedene Wahrkeitswerte zuordnen.

Theorem 8.2 (Kompaktheitssatz für klassische Aussagenlogik)
Sei $\mathcal{T}$ eine Menge aussagenlogischer Formeln. Dann ist $\mathcal{T}$ genau dann erfüllbar, wenn alle endlichen Teilmengen von $\mathcal{T}$ erfüllbar sind, in welchem Falle man sagt, $\mathcal{T}$ sei endlich erfüllbar.

Beweis: Klarerweise ist eine erfüllbare Menge auch endlich erfüllbar.
Nehmen wir also an, $\mathcal{T}$ sei endlich erfüllbar. Die Menge $T := \{ [A] \mid A \in \mathcal{T} \}$ ist eine endlich konsistente Teilmenge von $\mathcal{L}_{\mathrm{cl}}$, weil andernfalls bereits eine endliche Teilmenge von $\mathcal{T}$ unerfüllbar wäre. Wegen Lemma 7.6 gibt es nun eine maximale

endlich konsistente Teilmenge F von $\mathcal{L}_{\mathrm{cl}}$, die T als Teilmenge enthält. Die diesem F nach Lemma 7.2 und Lemma 7.4 entsprechende Belegung $\rho \in \mathsf{pVal}$ macht nun nun alle Formeln von $\mathcal{T}$ wahr. Also ist $\mathcal{T}$ erfüllbar. $\Box$

Der Kompaktheitssatz für die klassische Aussagenlogik ist *per se* nicht sonderlich interessant. Jedoch benötigen wir ihn zum Beweis des Kompaktheitssatzes für die klassische Prädikatenlogik, der äußerst bemerkenswerte Konsequenzen hat.

Für den Rest dieses Abschnitts begnügen wir uns mit der Feststellung einiger unmittelbarer Konsequenzen von Theorem 8.2.

Definition 8.3 *Sei $\mathcal{T}$ eine Menge aussagenlogischer Formel und $C \in \mathsf{PROP}$. Dann* folgt *C* aus *$\mathcal{T}$ genau dann, wenn jede Belegung $\rho \in \mathsf{pVal}$, die $\mathcal{T}$ erfüllt, auch C erfüllt. Dafür schreiben wir $\mathcal{T} \models C$.* $\Diamond$

Offenbar ist $\mathcal{T}$ unerfüllbar genau dann, wenn $\mathcal{T} \models \bot$.

Theorem 8.4 *Für $\mathcal{T} \subseteq \mathsf{PROP}$ und $A \in \mathsf{PROP}$ gilt $\mathcal{T} \models A$ genau dann, wenn $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{T}$ existieren, sodaß die Sequenz $A_1, \ldots, A_n \vdash A$ im klassischen Kalkül des Natürlichen Schließens herleitbar ist, wofür wir $\mathcal{T} \vdash A$ schreiben.*

Beweis: Die Richtung "$\Leftarrow$" ist trivial. Für die umgekehrte Richtung nehmen wir an, daß $\mathcal{T} \models A$. Dann ist $\mathcal{T} \cup \{\neg A\}$ unerfüllbar. Also gibt es aufgrund des Kompaktheitssatzes eine endliche Teilmenge $\mathcal{T}_0$ von $\mathcal{T} \cup \{\neg A\}$, die unerfüllbar ist. Sei $\{A_1, \ldots, A_n\} = \mathcal{T}_0 \cap \mathcal{T}$. Dann ist $\{A_1, \ldots, A_n\} \cup \{\neg A\}$ unerfüllbar und somit gilt die Sequenz $A_1, \ldots, A_n, \neg A \vdash \bot$ in allen 2–wertigen Modellen. Also ist aufgrund des Vollständigkeitssatzes Theorem 7.8 die Sequenz $A_1, \ldots, A_n, \neg A \vdash \bot$ klassisch herleitbar. Also ist $A_1, \ldots, A_n \vdash \neg\neg A$ und somit auch $A_1, \ldots, A_n \vdash A$ im klassischen Kalkül des Natürlichen Schließens herleitbar. $\Box$

Also ist eine Menge $\mathcal{T}$ aussagenlogischer Formeln genau dann unerfüllbar, wenn $\mathcal{T}$ in dem Sinne *inkonsistent* ist, daß für eine endliche Teilmenge $\{A_1, \ldots, A_n\} \subseteq \mathcal{T}$ die Sequenz $A_1, \ldots, A_n \vdash \bot$ klassisch herleitbar ist. Dementsprechend ist $\mathcal{T}$ genau dann erfüllbar, wenn für keine endliche Teilmenge $\{A_1, \ldots, A_n\}$ von $\mathcal{T}$ die Sequenz $A_1, \ldots, A_n \vdash \bot$ klassisch herleitbar ist, welche Eigenschaft üblicherweise als **Konsistenz** bzw. **Widerspruchsfreiheit** von $\mathcal{T}$ bezeichnet wird.

I.9 Resolutionsverfahren für die klassische Aussagenlogik

Wir wissen bereits, daß eine Aussage A genau dann in allen 2–wertigen Modellen gilt, wenn die Sequenz $\vdash A$ im klassischen Kalkül des natürlichen Schließens herleitbar ist. Anstatt $\vdash A$ raffiniert mithilfe des Kalküls herzuleiten, könnte man natürlich auch die "Holzhammermethode" verwenden, die darin besteht zu überprüfen, ob $[\![A]\!]\rho = \mathsf{tt}$ für alle $\rho \in \mathsf{pVal}$. Natürlich braucht man dabei nur die

Belegung der in A vorkommenden propositionalen Konstanten zu berücksichtigen. Trotzdem muß man, wenn n verschiedene propositionale Konstanten in A vorkommen, immerhin 2^n verschiedene Belegungen eben dieser (in A vorkommenden) Konstanten der Reihe nach durchprobieren. Man kann sich vorstellen, daß dies auch für nicht allzugroße n bereits etwas aufwendig wird (schon bei 7 verschiedenen Konstanten muß man 128 Belegungen durchprobieren).
Auch wenn man dieses exponentielle Verhalten i.a.[8] nicht umgehen kann, so doch in vielen konkreten Fällen. Das bekannteste algorithmische Verfahren dafür ist das sog. *Resolutionsverfahren* und bildet die Grundlage des *automatischen Beweisens*. Die Grundidee dabei ist, zu überprüfen, ob eine Formel(menge) inkonsistent ist, anstatt alle relevanten Belegungen durchzuprobieren und daraufhin zu untersuchen, ob sie die Formel(menge) wahrmachen. Man kann natürlich einen Algorithmus, der die Inkonsistenz einer Formel(menge) feststellt, auch dazu verwenden, um die Gültigkeit einer Formel nachzuweisen, da

$$A \text{ allgemeingültig} \quad \Longleftrightarrow \quad \neg A \text{ inkonsistent.}$$

Um das Resolutionsverfahren auf eine aussagenlogische Formel anwenden zu können, muß man diese zuerst in eine äquivalente konjunktive Normalform (d.h. eine Konjunktion von Disjunktionen negierter oder unnegierter propositionaler Konstanten) transformieren.

Definition 9.1 *Eine* Klausel *ist eine endliche Disjunktion von* Literalen, *d.h. Formeln der Gestalt p bzw. $\neg p$ für $p \in \mathsf{PC}$, wobei leere Disjunktionen als $\perp$ aufgefaßt werden. Eine Klausel heißt* reduziert *genau dann, wenn für kein $p \in \mathsf{PC}$ sowohl p als auch $\neg p$ als Glieder der Disjunktion vorkommen.* $\Diamond$

Lemma 9.2 *Jede aussagenlogische Formel ist äquivalent zu einer Konjunktion reduzierter Klauseln.*

Beweis: Man ersetzt zuerst $A \to B$ systematisch durch $\neg A \vee B$. Mithilfe der beiden deMorganschen Regeln

$$\neg(A \vee B) \Longleftrightarrow \neg A \wedge \neg B \qquad\qquad \neg(A \wedge B) \Longleftrightarrow \neg A \vee \neg B$$

und der Äquivalenz

$$\neg\neg A \Longleftrightarrow A$$

kann man jede $\to$–freie Formel in eine äquivalente Formel umwandeln, die aus Literalen mithilfe von $\wedge$ und $\vee$ aufgebaut ist. Diese kann man durch systematische Anwendung des Distributivgesetzes

$$(A \wedge B) \vee C \Longleftrightarrow (A \vee C) \wedge (B \vee C)$$

[8] außer wenn wider Erwarten P = NP sein sollte!

in eine logisch äquivalente Konjunktion von Klauseln umwandeln.
Durch Weglassen nicht-reduzierter Klauseln (die immer wahr sind) erhält man schlußendlich eine zur ursprünglichen Formel logisch äquivalente Konjunktion reduzierter Klauseln. $\square$

Es sei bemerkt, daß sich alle im Beweis von Lemma 9.2 verwendeten "Äquivalenzumformungen" algorithmisch formulieren lassen durch Rekursion über den Aufbau bestimmter induktiv definierter Formelklassen (Übung!).

Beispiel 9.3 *Um* $(\neg q\to\neg p)\to(p\to q)$ *zu* beweisen*, wobei* p *und* q *beliebige Elemente von* PC *sind, muß man* $\neg((\neg q\to\neg p)\to(p\to q))$ widerlegen*. Letztere Formel kann folgendermaßen in eine äquivalente konjunktive Normalform umgewandelt werden*

$$\begin{array}{ll}
\neg((\neg q\to\neg p)\to(p\to q)) & \iff \\
\neg(\neg(\neg\neg q\vee\neg p)\vee(\neg p\vee q)) & \iff \\
\neg((\neg q\wedge p)\vee\neg p\vee q) & \iff \\
(q\vee\neg p)\wedge p\wedge\neg q &
\end{array}$$

welch letztere Formel inkonsistent ist, da $q\vee\neg p$ *äquivalent zur Negation von* $p\wedge\neg q$ *ist.*

Die dem Resolutionsverfahren zugrundeliegende Idee steckt in folgendem Lemma.

Lemma 9.4 *Seien* A, B, C *aussagenlogische Formeln und* $p\in\mathsf{PC}$*. Wenn* p *in keiner der Formeln* A, B, C *vorkommt, dann sind folgende beide Formeln* erfüllungsäquivalent (equikonsistent)

(1) $C \wedge (p\vee A) \wedge (\neg p\vee B)$

(2) $C \wedge (A\vee B)$

d.h. (1) *ist konsistent genau dann, wenn* (2) *konsistent ist.*

Beweis: Angenommen (2) ist erfüllbar. Dann gibt es eine Belegung $\rho\in\mathsf{pVal}$, sodaß $[\![C\wedge(A\vee B)]\!]\rho = \mathsf{tt}$, d.h. $[\![C]\!]\rho = \mathsf{tt} = [\![A\vee B]\!]\rho$. Also ist $[\![A]\!]\rho = \mathsf{tt}$ oder $[\![B]\!]\rho = \mathsf{tt}$. Die Belegung ρ' sei definiert als

$$\rho'(p_n) = \begin{cases} \rho(p_n) & \text{wenn} \quad p_n \not\equiv p \\ \mathsf{ff} & \text{wenn} \quad [\![A]\!]\rho = \mathsf{tt} \\ \mathsf{tt} & \text{sonst} \end{cases}$$

für beliebige $n \in \mathbb{N}$. Offenbar gilt $[\![A]\!]\rho = [\![A]\!]\rho'$, $[\![B]\!]\rho = [\![B]\!]\rho'$ und $[\![C]\!]\rho = [\![C]\!]\rho'$, da nach Annahme p in keiner der Formeln A, B, C vorkommt.
Wenn $[\![A]\!]\rho = \mathsf{tt}$, dann gilt

$$\begin{array}{ll}
[\![C]\!]\rho' = [\![C]\!]\rho = \mathsf{tt} & \\
[\![p \vee A]\!]\rho' = \mathsf{tt} & \text{da } [\![A]\!]\rho' = [\![A]\!]\rho = \mathsf{tt} \\
[\![\neg p \vee B]\!]\rho' = \mathsf{tt} & \text{da } [\![\neg p]\!]\rho' = \mathsf{tt}, \text{ weil } [\![p]\!]\rho' = \mathsf{ff}.
\end{array}$$

Wenn $[\![A]\!]\rho = \mathsf{ff}$, dann $[\![B]\!]\rho = \mathsf{tt}$, und somit gilt

$$\begin{array}{ll}
[\![C]\!]\rho' = [\![C]\!]\rho = \mathsf{tt} & \\
[\![p \vee A]\!]\rho' = \mathsf{tt} & \text{da } [\![p]\!]\rho' = \mathsf{tt}, \text{ weil } [\![A]\!]\rho = \mathsf{ff} \\
[\![\neg p \vee B]\!]\rho' = \mathsf{tt} & \text{da } [\![B]\!]\rho' = [\![B]\!]\rho = \mathsf{tt}.
\end{array}$$

Für die andere Richtung nehmen wir an, (1) sei erfüllbar. Dann gibt es eine Belegung ρ, sodaß $[\![C]\!]\rho = [\![p \vee A]\!]\rho = [\![\neg p \vee B]\!]\rho = \mathsf{tt}$. Wenn $[\![p]\!]\rho = \mathsf{tt}$, dann $[\![\neg p]\!]\rho = \mathsf{ff}$ und somit $[\![B]\!]\rho = \mathsf{tt}$. Wenn $[\![p]\!]\rho = \mathsf{ff}$, dann $[\![A]\!]\rho = \mathsf{tt}$. Also ist in jedem Fall $[\![A \vee B]\!]\rho = \mathsf{tt}$. $\square$

Aufgrund dieses Lemmas ergibt sich folgender Algorithmus.

Theorem 9.5 *Sei $\mathcal{F}$ eine Menge reduzierter Klauseln und p eine propositionale Konstante. Dann kann man $\mathcal{F}$ in folgende drei disjunkte Klassen zerlegen*

$\mathcal{F}_p$	*Menge der Klauseln von $\mathcal{F}$, in denen p als Disjunktionsglied vorkommt*
$\mathcal{F}_{\neg p}$	*Menge der Klauseln von $\mathcal{F}$, in denen $\neg p$ als Disjunktionsglied vorkommt*
$\mathcal{F}_r$	*Menge der restlichen Klauseln von $\mathcal{F}$.*

Sei $\mathcal{R}'_p$ die Menge aller Klauseln $C_1 \vee C_2$, sodaß $p \vee C_1 \in \mathcal{F}_p$ und $\neg p \vee C_2 \in \mathcal{F}_{\neg p}$, wobei weder p in C_1 noch $\neg p$ in C_2 vorkommt. Sei $\mathcal{R}_p$ die Menge der Klauseln, die man aus $\mathcal{R}'_p$ erhält, indem man alle nichtreduzierten Klauseln aus $\mathcal{R}'_p$ entfernt und in den verbleibenden Klauseln mehrfache Vorkommen von Literalen eliminiert. Wir nennen $\mathcal{R}_p$ die Menge der Resolventen von $\mathcal{F}$ bzgl. *p und bezeichnen sie mit* $\mathrm{Res}_p(\mathcal{F})$.
Dann ist die Klauselmenge $\mathcal{F}$ erfüllungsäquivalent zu der Klauselmenge $\mathrm{Red}_p(\mathcal{F}) := \mathcal{F}_r \cup \mathcal{R}_p$, *in welcher weder p noch $\neg p$ als Literale Vorkommen.*

Beweis: Die Klauselmenge $\mathcal{F}$ ist logisch äquivalent zu der Formel

(1) $\bigwedge \mathcal{F}_r \wedge \bigwedge \mathcal{F}_p \wedge \bigwedge \mathcal{F}_{\neg p}$

da $\mathcal{F} = \mathcal{F}_r \cup \mathcal{F}_p \cup \mathcal{F}_{\neg p}$. Offenbar ist aufgrund des Distributivitätsgesetzes $\bigwedge \mathcal{F}_p$ logisch äquivalent zu $p \vee \bigwedge \mathcal{C}_p$ und $\bigwedge \mathcal{F}_{\neg p}$ logisch äquivalent zu $\neg p \vee \bigwedge \mathcal{C}_{\neg p}$, wobei $\mathcal{C}_p$ bzw. $\mathcal{C}_{\neg p}$ die Mengen derjeniger Klauseln C ohne Vorkommen der Literale p und $\neg p$ sind, sodaß $p \vee C \in \mathcal{F}_p$ bzw. $\neg p \vee C \in \mathcal{F}_{\neg p}$. Aufgrund dieser Beobachtung ist (1) logisch äquivalent zu

(2) $\bigwedge \mathcal{F}_r \wedge (p \vee \bigwedge \mathcal{C}_p) \wedge \bigwedge(\neg p \vee \bigwedge \mathcal{C}_{\neg p})$.

Wegen Lemma 9.4 ist aber (2) erfüllungsäquivalent zu

(3) $\bigwedge \mathcal{F}_r \wedge (\bigwedge \mathcal{C}_p \vee \bigwedge \mathcal{C}_{\neg p})$.

Wiederum aufgrund des Distributivitätsgesetzes ist (3) logisch äquivalent zu

(4) $\bigwedge \mathcal{F}_r \wedge \bigwedge_{C_1 \in \mathcal{C}_p, C_2 \in \mathcal{C}_{\neg p}} C_1 \vee C_2$.

Da aber $\bigwedge_{C_1 \in \mathcal{C}_p, C_2 \in \mathcal{C}_{\neg p}} C_1 \vee C_2$ zu $\bigwedge \mathcal{R}'_p$ und somit zu $\bigwedge \mathcal{R}_p$ logisch äquivalent ist, ist (4) logisch äquivalent zu

(5) $\bigwedge \mathcal{F}_r \wedge \bigwedge \mathcal{R}_p$.

Da logische Äquivalenz Erfüllungsäquivalenz impliziert, sind also $\mathcal{F}$ und $\mathcal{F}_r \cup \mathcal{R}_p$ erfüllungsäquivalent. □

Wie schon teilweise im Beweis obigen Theorems werden wir im weiteren Klauseln mit den Mengen ihrer Disjunktionsglieder, also mit endlichen Mengen von Literalen identifizieren. Entsprechend heißt eine endliche Menge von Literalen "reduziert", wenn sie für keine propositionale Konstante p sowohl p als auch $\neg p$ als Element enthält.

Theorem 9.6 *Sei $\mathcal{F}$ eine Menge reduzierter Klauseln. Indem man auf $\mathcal{F}$ sukzessive für jede in $\mathcal{F}$ vorkommende propositionale Konstante p das Verfahren aus Theorem 9.5 anwendet, erhält man am Ende eine zu $\mathcal{F}$ erfüllungsäquivalente Menge $\mathcal{F}_{\mathrm{red}}$, die ausschließlich leere Klauseln enthält. Die Menge $\mathcal{F}$ ist erfüllbar, wenn $\mathcal{F}_{\mathrm{red}}$ leer ist, und $\mathcal{F}$ ist unerfüllbar, wenn $\mathcal{F}_{\mathrm{red}}$ die leere Klausel enthält.*

Beweis: Wenn man das Verfahren aus Theorem 9.5 auf eine Klauselmenge $\mathcal{F}$ und eine propositionale Konstante p anwendet, dann gilt für die Klauseln der Resolvente $\mathcal{R}_p$, daß alle in ihnen vorkommenden propositionalen Konstanten bereits in $\mathcal{F}$ vorkommen und überdies von p verschieden sind. Wenn man sukzessive für alle in $\mathcal{F}$ vorkommenden p das Verfahren von Theorem 9.5 der Reihe nach anwendet, erhält man schlußendlich eine zu $\mathcal{F}$ erfüllungsäquivalente Klauselmenge $\mathcal{F}_{\mathrm{red}} \subseteq \{\emptyset\}$. Wenn $\mathcal{F}_{\mathrm{red}} = \emptyset$, dann ist $\mathcal{F}$ erfüllbar, weil $\emptyset$ erfüllbar ist. Wenn $\mathcal{F}_{\mathrm{red}} = \{\emptyset\}$, dann ist $\mathcal{F}$ unerfüllbar, da die der leeren Klausel entsprechende Formel $\perp$ unerfüllbar ist. □

Dieser Algorithmus zur Entscheidung der Erfüllbarkeit endlicher Klauselmengen ist unter dem Namen *Resolutionsverfahren für die Aussagenlogik* bekannt.

Beispiel 9.7 *Wir illustrieren das Resolutionsverfahren anhand der Klauselmenge*

$$\mathcal{F} := \{\{\neg p, q\}, \{p\}, \{\neg q\}\}$$

die der konjunktiven Normalform aus Beispiel 9.3 entspricht.

1. Schritt*:*
Wir berechnen die Resolvente von $\mathcal{F}$ bzgl. p : $\mathcal{F}_p = \{\{p\}\}$, $\mathcal{F}_{\neg p} = \{\{\neg p, q\}\}$, $\mathcal{F}_r = \{\{\neg q\}\}$ und somit $\mathrm{Res}_p(\mathcal{F}) = \{\{q\}\}$, also $\mathrm{Red}_p(\mathcal{F}) = \{\{q\}, \{\neg q\}\}$.

2. Schritt*:*
Wir berechnen die Resolvente von $\mathcal{F}' := \{\{q\}, \{\neg q\}\}$ *bzgl.* q*:* $\mathcal{F}'_q = \{\{q\}\}$, $\mathcal{F}'_{\neg q} = \{\{\neg q\}\}$, $\mathcal{F}'_r = \{\}$ *und somit* $\mathrm{Res}_q(\mathcal{F}') = \{\emptyset\} = \mathrm{Red}_q(\mathcal{F}')$.

Also ist $\mathcal{F}_{\mathrm{red}} = \{\emptyset\}$ *und somit* $\mathcal{F}$ *nach Theorem 9.6 unerfüllbar.*

Das in den Theoremen 9.5 und 9.6 beschriebene Verfahren ist ein *Breitensuchverfahren*, da *alle möglichen* Resolventen bzgl. p gebildet werden. Wenn man aber für eine Klauselmenge nicht entscheiden will, ob sie unerfüllbar ist oder nicht, sondern gleich zeigen will, daß sie unerfüllbar ist (weil man das z.B. stark vermutet), dann genügt es, durch endlichmalige Anwendung folgender *Resolutionsregel*

$$\frac{\{p\} \cup C_1 \quad \{\neg p\} \cup C_2}{C_1 \cup C_2} \text{ (Res)}$$

die leere Klausel herzuleiten.
Dies ist natürlich i.a. viel effizienter, da man unnötige Resolutionen vermeiden kann ("Tiefensuche"), hat jedoch den Nachteil, daß es kein Entscheidungsverfahren ist, da man ja nicht systematisch alle Fälle untersucht.

II PRÄDIKATENLOGIK

Wir wenden uns nun der *Prädikatenlogik* oder *Logik 1. Stufe* zu, wo primitive Aussagen nicht einfach unstrukturiert sind, sondern von der Form

$$P(t_1, \ldots, t_n)$$

wobei die t_i Terme sind und P ein n–stelliges *Relations–* oder *Prädikatensymbol* ist. Mithilfe der Prädikatensymbole kann man man einige grundlegende Beziehungen zwischen Objekten zum Ausdruck bringen. Außerdem kann man über Objekte *quantifizieren*, da Variable in den Formeln vorkommen können. Kompliziertere Beziehungen zwischen Objekten kann man durch Formeln zum Ausdruck bringen, in denen Variable frei vorkommen.

II.1 Die Sprache der Prädikatenlogik

Definition 1.1 *Eine* Sprache 1. Stufe *ist ein Tripel* $\mathcal{L} = (\mathcal{F}, \mathcal{P}, ar)$, *wobei* $\mathcal{F}$ *eine Menge von* Funktionssymbolen, $\mathcal{P}$ *eine Menge von* Prädikatensymbolen *und* $ar : \mathcal{F} \cup \mathcal{P} \to \mathbb{N}$, *wobei* $\mathcal{F}$ *und* $\mathcal{P}$ *als disjunkt angenommen werden. Die Funktion* ar *heißt* Stelligkeitsfunktion, *da sie jedem Funktions– und Prädikatensymbol seine* Stelligkeit *zuordnet.* $\Diamond$

Beispiel 1.2 *Die Sprache der* Peano–Arithmetik *ist gegeben durch*

$$\mathcal{F} = \{zero, succ, add, mult\} \qquad \mathcal{P} = \{Eq\}$$

und die Stelligkeitsfunktion $ar : \mathcal{F} \cup \mathcal{P} \to \mathbb{N}$, *die durch die Setzung*

$$ar(zero) = 0 \quad ar(succ) = 1 \quad ar(add) = ar(mult) = ar(Eq) = 2$$

gegeben ist.

Definition 1.3 *Sei* $\mathcal{L} = (\mathcal{F}, \mathcal{P}, ar)$ *eine Sprache 1. Stufe und* $\mathcal{V}$ *eine abzählbar unendliche Menge von* Variablen, *die als disjunkt zu* $\mathcal{F}$ *und* $\mathcal{P}$ *angenommen ist, d.h.* $\mathcal{V} \cap \mathcal{F} = \emptyset = \mathcal{V} \cap \mathcal{P}$.
Die Menge $\mathsf{Tm}(\mathcal{L})$ *der* Terme der Sprache $\mathcal{L}$ *sei induktiv durch folgende beide Regeln definiert.*

(1) *Jedes* $x \in \mathcal{V}$ *ist ein Term, d.h.* $\mathcal{V} \subseteq \mathsf{Tm}(\mathcal{L})$

(2) *Wenn* $f \in \mathcal{F}$ *mit* $ar(f) = n$ *und* $t_1, \ldots, t_n \in \mathsf{Tm}(\mathcal{L})$, *dann ist* $f(t_1, \ldots, t_n) \in \mathsf{Tm}(\mathcal{L})$.

Durch Rekursion über den Aufbau von Termen definieren wir eine Funktion $V : \mathsf{Tm}(\mathcal{L}) \to \mathcal{P}_{\mathsf{fin}}(\mathcal{V})$ *durch die Regeln*

$$V(x) = \{x\} \qquad V(f(t_1, \ldots, t_n)) = \bigcup_{i=1}^{n} V(t_i) \quad .$$

Wir nennen $V(t)$ *die* Menge der in t vorkommenden Variablen. ◊

Es sei bemerkt, daß $\mathsf{Tm}(\mathcal{L})$ wie in der Allgemeinen Algebra definiert ist. Allerdings schränken wir uns auf 1–sortige Signaturen ein.
Aber im Unterschied zur Allgemeinen Algebra gibt es auch Prädikatensymbole in $\mathcal{L}$ mit deren Hilfe wir Formeln aufbauen können, in denen Terme vorkommen.

Definition 1.4 *Sei* $\mathcal{L} = (\mathcal{F}, \mathcal{P}, ar)$ *eine Sprache 1. Stufe. Die Menge* $\mathsf{Fm}(\mathcal{L})$ *der* Formeln der Sprache $\mathcal{L}$ *sei induktiv durch folgende Regeln definiert.*

(1) *Wenn* P *ein Prädikatensymbol von* $\mathcal{L}$ *ist, d.h.* $P \in \mathcal{P}$*, mit* $ar(P)=n$ *und* $t_1, \ldots, t_n \in \mathsf{Tm}(\mathcal{L})$*, dann ist* $P(t_1, \ldots, t_n) \in \mathsf{Fm}(\mathcal{L})$*.*

(2) $\bot \in \mathsf{Fm}(\mathcal{L})$*.*

(3) *Wenn* $A, B \in \mathsf{Fm}(\mathcal{L})$*, dann sind auch* $(A \wedge B), (A \vee B), (A \to B) \in \mathsf{Fm}(\mathcal{L})$*.*

(4) *Wenn* $A \in \mathsf{Fm}(\mathcal{L})$ *und* $x \in \mathcal{V}$*, so sind auch* $(\forall x.A), (\exists x.A) \in \mathsf{Fm}(\mathcal{L})$*.*

Formeln, die nur mithilfe von (1) konstruiert worden sind, heißen primitiv *oder* atomar. *Formeln die ohne Verwendung von (4) konstruiert worden sind heißen* quantorenfrei.
Wie schon in der Aussagenlogik steht $\neg A$ *für* $(A \to \bot)$*.* ◊

Wie schon in der Aussagenlogik lassen wir oft Klammern aus Gründen der Lesbarkeit weg.

Wir geben nun einige Beispiele für Formeln an.

Beispiel 1.5 *Sei* $\mathcal{L}$ *die Sprache aus Beispiel 1.2. Folgende Ausdrücke sind Beispiele für Formeln der Sprache* $\mathcal{L}$*.*

(1) $\neg Eq(zero, succ(x))$

(2) $Eq(succ(x), succ(y)) \to Eq(x, y)$

(3) $Eq(add(x, zero), x)$

(4) $Eq(add(x, succ(y)), succ(add(x, y)))$

(5) $Eq(mult(x, zero), zero)$

(6) $Eq(mult(x, succ(y)), add(mult(x, y), x))$

Beispiel 1.6 *Wenn $ar(P)$=1, so ist $(\forall x.(P(x) \vee \neg P(x)))$ eine Formel, für die wir abkürzend $\forall x.P(x) \vee \neg P(x)$ schreiben.*
Wenn $ar(Q)$=1 für ein unter Umständen neues Prädikatensymbol Q, dann ist $((\forall x.(P(x) \to Q(x))) \to ((\forall x.P(x)) \to (\forall x.Q(x))))$ eine Formel, für die wir abkürzend $(\forall x.P(x) \to Q(x)) \to \forall x.P(x) \to \forall x.Q(x)$ schreiben.

Als nächstes definieren wir *freie* und *gebundene* Variable.

Definition 1.7 *Sei $\mathcal{L}$ eine Sprache 1.Stufe. Durch Rekursion über den Aufbau von Formeln assoziieren wir jeder Formel A die Mengen $\mathsf{FV}(A)$ und $\mathsf{BV}(A)$ der in A* freien *bzw.* gebundenen Variablen *in folgender Weise*

$$\mathsf{FV}(P(t_1, \ldots, t_n)) = \bigcup_{i=1}^{n} V(t_i)$$

$$\mathsf{FV}(\bot) = \emptyset$$

$$\mathsf{FV}(A \wedge B) = \mathsf{FV}(A \vee B) = \mathsf{FV}(A \to B) = \mathsf{FV}(A) \cup \mathsf{FV}(B)$$

$$\mathsf{FV}(\forall x.A) = \mathsf{FV}(\exists x.A) = \mathsf{FV}(A) \setminus \{x\}$$

$$\mathsf{BV}(P(t_1, \ldots, t_n)) = \emptyset$$

$$\mathsf{BV}(\bot) = \emptyset$$

$$\mathsf{BV}(A \wedge B) = \mathsf{BV}(A \vee B) = \mathsf{BV}(A \to B) = \mathsf{BV}(A) \cup \mathsf{BV}(B)$$

$$\mathsf{BV}(\forall x.A) = \mathsf{BV}(\exists x.A) = \mathsf{BV}(A) \cup \{x\}$$

Offenbar sind $\mathsf{FV}(A)$ und $\mathsf{BV}(A)$ immer endlich. $\Diamond$

Anhand des Beispiels $P(x) \to \exists x.P(x)$ sieht man, daß eine Variable sowohl frei als auch gebunden in einer Formel vorkommen kann.

Als nächstes konzentrieren wir uns auf die korrekte Definition der Substitution eines Termes t für eine Variable x in einer Formel A. Im Unterschied zu Termen gibt es da ein subtiles Problem. Sei $A \equiv \forall x.P(x, y)$. Wenn wir für y in A ganz brutal den Term x einsetzen, so erhalten wir $\forall x.P(x, x)$. Dann wird aber das in x frei vorkommende x durch den Quantor $\forall x.$ gebunden. Wir müssen deshalb, bevor wir y in A durch x ersetzen, die Variable x in A, die durch $\forall x.$ gebunden wird, geeignet umbenennen, etwa indem wir statt A die Formel $A' \equiv \forall z.P(z, y)$ betrachten und in A' statt in A die Variable y durch x ersetzen. Deshalb treffen wir folgende Vereinbarung:

KONVENTION
Wir unterscheiden nicht zwischen den Formeln A und B, wenn B aus A durch Umbenennung gebundener Variablen entsteht, soferne durch diese Umbenennungen keine vormals freien Vorkommen von Variablen gebunden werden.

Mithilfe dieser in der Literatur auch unter dem Namen "α–Konversion" bekannten Konvention läßt sich die Substitution leicht durch Rekursion über den Aufbau von Formeln wie folgt definieren.

Definition 1.8 *Sei x eine Variable und t ein Term.*
Für Terme t' sei $t'[t/x]$ wie in der Allgemeinen Algebra definiert: jedes Vorkommen von x in t' wird rein "textuell" durch t ersetzt.
Für Formeln A sei $A[t/x]$ wie folgt durch Rekursion über den Aufbau von A definiert

$$
\begin{aligned}
&P(t_1,\ldots,t_n)[t/x] \equiv P(t_1[t/x],\ldots,t_n[t/x])\\
&\bot[t/x] \equiv \bot\\
&(A{\wedge}B)[t/x] \equiv A[t/x]{\wedge}B[t/x]\\
&(A{\vee}B)[t/x] \equiv A[t/x]{\vee}B[t/x]\\
&(A{\to}B)[t/x] \equiv A[t/x]{\to}B[t/x]\\
&(\forall x.A)[t/x] \equiv (\forall x.A)\\
&(\forall y.A)[t/x] \equiv \forall z.A'[t/x]\\
&(\exists x.A)[t/x] \equiv (\exists x.A)\\
&(\exists y.A)[t/x] \equiv \exists z.A'[t/x]
\end{aligned}
$$

wobei $\forall y.A$ und $\forall z.A'$ bzw. $\exists y.A$ und $\exists z.A'$ im Sinne unserer Konvention gleich sind und z weder in A noch in t frei vorkommen. $\Diamond$

Beispiel 1.9 *Sei $\mathcal{L}$ wiederum die Sprache aus Beispiel 1.2. Wenn A eine Formel der Sprache $\mathcal{L}$ ist und x eine Variable, so sind $A[zero/x]$ und $A[succ(x)/x]$ wiederum Formeln der Sprache $\mathcal{L}$. Also ist auch*

$$(\mathsf{Ind}_{A,x}) \qquad A[zero/x] \wedge \forall x.(A{\to}A[succ(x)/x]) \to \forall x.A$$

eine Formel der Sprache $\mathcal{L}$.
Um anzudeuten, daß x in A vorkommt bzw. vorkommen kann, schreiben wir oft $A(x)$ statt A. In diesem Fall schreiben wir oft auch $A(t)$ statt $A[t/x]$. Dann erhält $(\mathsf{Ind}_{A,x})$ folgende etwas intuitivere Form

$$(\mathsf{Ind}_{A,x}) \qquad A(zero) \wedge \forall x.(A(x){\to}A(succ(x))) \to \forall x.A(x)$$

die uns schon aus der Allgemeinen Algebra als Induktionsprinzip *vertraut ist.*

Definition 1.10 (Peano–Arithmetik)
Sei $\mathcal{L}$ die Sprache aus Beispiel 1.2, d.h. die Sprache der Arithmetik.
Aus Gründen der Lesbarkeit schreiben wir oft

$$
\begin{array}{lll}
t_1 = t_2 & \textit{statt} & Eq(t_1, t_2) \\
t_1 + t_2 & \textit{statt} & add(t_1, t_2) \\
t_1 \cdot t_2 & \textit{statt} & mult(t_1, t_2) \quad .
\end{array}
$$

Die Formeln aus den Beispielen 1.5 und 1.9 lesen sich dann als

(1) $\neg zero{=}succ(x)$

(2) $succ(x){=}succ(y) \to x{=}y$

(3) $x{+}zero = x$

(4) $x{+}succ(y) = succ(x{+}y)$

(5) $x{\cdot}zero = zero$

(6) $x{\cdot}succ(y) = x{\cdot}y{+}x$

(7) $A(zero) \land \forall x.(A(x){\to}A(succ(x)) \to \forall x.A(x)$
für alle Variablen x und Formeln $A(x)$ der Sprache $\mathcal{L}$

und heißen Axiome der Peano–Arithmetik (PA).
Um zu erzwingen, daß = tatsächlich die typischen Eigenschaften der Gleichheit besitzt, fordern wir folgende **Gleichheitsaxiome**

$(Eq1)$ $t{=}t$

$(Eq2)$ $A(t_1) \land t_1{=}t_2 \to A(t_2)$

die nicht bloß für die Sprache der Arithmetik Sinn machen, sondern für beliebige Sprachen mit einem ausgezeichneten 2–stelligen Prädikatensymbol. $\Diamond$

Bemerkenswerterweise lassen sich so gut wie alle der üblichen Aussagen der Arithmetik aus den Peano–Axiomen herleiten. Wenn man sich allerdings auf den Kopf stellt, kann man (relativ komplizierte) Aussagen konstruieren, die für das *Standardmodell* $\mathbb{N}$ der natürlichen Zahlen wahr sind, aber in der Peano–Arithmetik nicht bewiesen werden können. Dem kann auch durch keine vernünftige[9] Erweiterung der PA abgeholfen werden. Dieses Phänomen ist unter dem Namen *Gödelscher Unvollständigkeitssatz* populär geworden.
Dessen ungeachtet wird der später eingeführte Herleitungskalkül für die Prädikatenlogik *insoferne vollständig* sein, als dann z.B. jede Aussage, die in *allen* Modellen der Peano–Axiome gilt, auch tatsächlich aus den Peano–Axiomen herleitbar ist.

[9]d.h. solange die Axiome im Prinzip durch ein Computerprogramm aufgezählt werden können

Die daraus zu ziehende Konsequenz ist, daß es für die Peano–Arithmetik auch andere Modelle gibt als bloß das Standardmodell $\mathbb{N}$. Die Existenz solcher "abartiger" Strukturen, auch "Nichtstandardmodelle" genannt, werden wir später mithilfe des Kompaktheitssatzes nachweisen. Eine vertiefte Diskussion dieser Phänomene findet im Rahmen meiner Hauptstudiumsvorlesung "Berechenbarkeit und Unvollständigkeit" statt.

II.2 Natürliches Schließen für die Prädikatenlogik

Wir erweitern nun den Kalkül des Natürlichen Schließens aus Definition I.4.1 auf die Prädikatenlogik, indem wir Introduktions– und Eliminationsregeln für die Quantoren $\forall$ und $\exists$ hinzunehmen. In den von nun an betrachteten Sequenzen gestatten wir natürlich beliebige prädikatenlogische Formeln (und nicht bloß aussagenlogische).

Definition 2.1 *Sei $\mathcal{L}$ eine Sprache 1. Stufe. Eine* Sequenz (der Prädikatenlogik für die Sprache $\mathcal{L}$) *ist ein Ausdruck der Form $\Gamma \vdash A$, wobei Γ eine Liste von Elementen in $\mathsf{Fm}(\mathcal{L})$ und A ein Element von $\mathsf{Fm}(\mathcal{L})$ ist.*
Die Menge der herleitbaren Sequenzen *sei induktiv definiert durch die Regeln von Definition I.4.1 und folgende Regeln für Quantoren*

$$\frac{\Gamma \vdash A(x) \quad x \notin FV(\Gamma)}{\Gamma \vdash \forall x.A(x)}\,(\forall I) \qquad\qquad \frac{\Gamma \vdash \forall x.A(x)}{\Gamma \vdash A(t)}\,(\forall E)$$

$$\frac{\Gamma \vdash A(t)}{\Gamma \vdash \exists x.A(x)}\,(\exists I) \qquad\qquad \frac{\Gamma \vdash \exists x.A(x) \quad \Gamma, A(x) \vdash C \quad x \notin FV(\Gamma, C)}{\Gamma \vdash C}\,(\exists E)$$

Dies sind die Beweisregeln der konstruktiven *oder* intuitionistischen *Prädikatenlogik. Durch Hinzunahme der Regel* (raa) *erhält man die* klassische *Prädikatenlogik.* $\Diamond$

Die Notwendigkeit der Variablenbedingungen in den Regeln $(\forall I)$ und $(\exists E)$ diskutieren wir am Ende dieses Abschnitts.
Ein semantisches Kriterium für die Gültigkeit von Sequenzen der Prädikatenlogik lernen wir im nächsten Abschnitt kennen, wofür sich leicht beweisen läßt, daß alle herleitbaren Sequenzen gültig sind. Später werden wir dann einen Vollständigkeitssatz beweisen, der besagt, daß alle gültigen Sequenzen auch tatsächlich im klassischen Kalkül herleitbar sind.
Vorerst betrachten wir aber einige Herleitungen, die die Verwendung der Quantorenregeln illustrieren.

(1) Seien $A(x)$ und $B(x)$ beliebige Formeln.

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\forall x.(A(x)\to B(x)), \forall x.A(x) \vdash \forall x.(A(x)\to B(x))}\,(\mathrm{ax})}{\forall x.(A(x)\to B(x)), \forall x.A(x) \vdash A(x)\to B(x)}\,(\forall E) \qquad \dfrac{\dfrac{}{\forall x.(A(x)\to B(x)), \forall x.A(x) \vdash \forall x.A(x)}\,(\mathrm{ax})}{\forall x.(A(x)\to B(x)), \forall x.A(x) \vdash A(x)}\,(\forall E)}{\forall x.(A(x)\to B(x)), \forall x.A(x) \vdash B(x)}\,(\to E)}{\forall x.(A(x)\to B(x)), \forall x.A(x) \vdash \forall x.B(x)}\,(\forall I)
$$

(2) Sei $A(x)$ eine beliebige Formel.

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\neg\exists x.A(x), A(x) \vdash \neg\exists x.A(x)}\,(\mathrm{ax}) \qquad \dfrac{\dfrac{}{\neg\exists x.A(x), A(x) \vdash A(x)}\,(\mathrm{ax})}{\neg\exists x.A(x), A(x) \vdash \exists x.A(x)}\,(\exists I)}{\neg\exists x.A(x), A(x) \vdash \bot}\,(\to E)}{\neg\exists x.A(x) \vdash \neg A(x)}\,(\to I)}{\neg\exists x.A(x) \vdash \forall x.\neg A(x)}\,(\forall I)
$$

Wir überlassen die Herleitung der Sequenz $\forall x.\neg A(x) \vdash \neg\exists x.A(x)$ dem geneigten Leser als Übung!

(3) Sei $A(x)$ eine beliebige Formel und $\Gamma \equiv \exists x.\neg A(x), \neg A(x)$.

$$
\dfrac{\dfrac{}{\exists x.\neg A(x) \vdash \exists x.\neg A(x)}\,(\mathrm{ax}) \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\Gamma, \forall x.A(x) \vdash \neg A(x)}\,(\mathrm{ax}) \qquad \dfrac{\dfrac{}{\Gamma, \forall x.A(x) \vdash \forall x.A(x)}\,(\mathrm{ax})}{\Gamma, \forall x.A(x) \vdash A(x)}\,(\forall E)}{\dfrac{\Gamma, \forall x.A(x) \vdash \bot}{\Gamma \vdash \neg\forall x.A(x)}\,(\to I)}\,(\to E)}{\exists x.\neg A(x) \vdash \neg\forall x.A(x)}\,(\exists E)
$$

(4) Die Umkehrung der Sequenz aus Beispiel (3) läßt sich nur mithilfe klassischer Logik, d.h. mithilfe von (raa), beweisen.[10]

[10]Der Beweis, daß man *reductio ad absurdum* tatsächlich braucht, übersteigt allerdings den Rahmen dieser Vorlesung.

Wir schreiben abkürzend Γ für $\neg\forall x.A(x), \neg\exists x.\neg A(x)$.

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{}
\RightLabel{(ax)}
\UnaryInfC{$\Gamma \vdash \neg\forall x.A(x)$}
\AxiomC{}
\RightLabel{(ax)}
\UnaryInfC{$\Gamma \vdash \neg\exists x.\neg A(x)$}
\AxiomC{}
\RightLabel{(2)}
\UnaryInfC{$\neg\exists x.\neg A(x) \vdash \forall x.\neg\neg A(x)$}
\RightLabel{(cut)}
\BinaryInfC{$\Gamma \vdash \forall x.\neg\neg A(x)$}
\RightLabel{$(\forall E)$}
\UnaryInfC{$\Gamma \vdash \neg\neg A(x)$}
\RightLabel{(raa)}
\UnaryInfC{$\Gamma \vdash A(x)$}
\RightLabel{$(\forall I)$}
\UnaryInfC{$\Gamma \vdash \forall x.A(x)$}
\RightLabel{$(\to E)$}
\BinaryInfC{$\neg\forall x.A(x), \neg\exists x.\neg A(x) \vdash \bot$}
\RightLabel{$(\to I)$}
\UnaryInfC{$\neg\forall x.A(x) \vdash \neg\neg\exists x.\neg A(x)$}
\RightLabel{(raa)}
\UnaryInfC{$\neg\forall x.A(x) \vdash \exists x.\neg A(x)$}
\end{prooftree}
$$

Wir beweisen nun ein Lemma, das wir später ganz wesentlich für den Vollständigkeitsbeweis für die klassische Prädikatenlogik benötigen.

Lemma 2.2 *Seien $A(x)$ und B prädikatenlogische Formeln, sodaß $x \notin \mathsf{FV}(B)$. Dann folgt*

(1) *aus der Herleitbarkeit von $(\exists x.A(x)) \to A(x) \vdash B$ die Herleitbarkeit von $\vdash B$ und*

(2) *aus der Herleitbarkeit von $A(x) \to \forall x.A(x) \vdash B$ die Herleitbarkeit von $\vdash B$.*

Beweis: (1) : Angenommen $(\exists x.A(x)) \to A(x) \vdash B$ ist herleitbar. Also ist $(\neg\exists x.A(x)) \vee A(x) \vdash B$ herleitbar. Also sind die Sequenzen $\neg\exists x.A(x) \vdash B$ und $A(x) \vdash B$ herleitbar. Da x in B voraussetzungsgemäß nicht frei vorkommt, ist auch $\exists x.A(x) \vdash B$ herleitbar. Da aber $\vdash \exists x.A(x) \vee \neg\exists x.A(x)$ herleitbar ist, folgt mit $(\vee E)$ die Herleitbarkeit von $\vdash B$.
(2) : Übung! $\square$

Als abschreckende Beispiele für die Mißachtung der Variablenbedingung bei Anwendung der Regeln $(\forall I)$ und $(\exists E)$ betrachte man folgende inkorrekte Herleitungen, in denen fehlerhafte Anwendungen der Regeln $(\forall I)$ und $(\exists E)$ durch † markiert werden.

Wenn man bei Anwendung der Regel $(\forall I)$ die Variablenbedingung mißachtet, kann man folgende falsche "Herleitung" basteln.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{A(x)\vdash A(x)}\,(\mathrm{ax})}{A(x)\vdash\forall x.A(x)}\,(\forall I)^\dagger}{\vdash A(x)\to\forall x.A(x)}\,(\to I)}{\vdash\forall x.(A(x)\to\forall x.A(x))}\,(\forall I)}{\vdash A(t)\to\forall x.A(x)}\,(\forall E)$$

Diese Sequenz ist im allgemeinen falsch, da ja $A(t)$ wahr sein kann, obwohl das Prädikat $A(x)$ nicht für alle x gilt, z.B. "wenn 2 eine Primzahl ist, so sind alle natürlichen Zahlen Primzahlen".

Wenn man bei Anwendung der Regel $(\exists E)$ die Variablenbedingung dadurch verletzt, daß die Konklusion die Variable x frei enthält, kann man folgende falsche "Herleitung" basteln.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\exists x.A(x)\vdash\exists x.A(x)}\,(\mathrm{ax}) \qquad \dfrac{}{\exists x.A(x),A(x)\vdash A(x)}\,(\mathrm{ax})}{\exists x.A(x)\vdash A(x)}\,(\exists E)^\dagger}{\exists x.A(x)\vdash\forall x.A(x)}\,(\forall I)$$

Diese Sequenz ist im allgemeinen falsch; betrachte z.B. die Aussage "wenn es eine Primzahl gibt, sind alle natürlichen Zahlen Primzahlen".

Wenn man bei Anwendung der Regel $(\exists E)$ die Variablenbedingung dadurch verletzt, daß im Kontext die Variable x frei vorkommt, kann man folgende falsche "Herleitung" basteln, wobei $\Gamma\equiv\exists x.\neg A(x), A(x)$.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\Gamma\vdash\exists x.\neg A(x)}\,(\mathrm{ax}) \qquad \dfrac{\dfrac{}{\Gamma,\neg A(x)\vdash\neg A(x)}\,(\mathrm{ax}) \quad \dfrac{}{\Gamma,\neg A(x)\vdash A(x)}\,(\mathrm{ax})}{\Gamma,\neg A(x)\vdash\bot}\,(\to E)}{\exists x.\neg A(x), A(x)\vdash\bot}\,(\exists E)^\dagger}{\exists x.\neg A(x)\vdash\neg A(x)}\,(\to I)}{\exists x.\neg A(x)\vdash\forall x.\neg A(x)}\,(\forall I)$$

Diese Sequenz ist im allgemeinen falsch: betrachte z.B. die Aussage "wenn es eine Zahl gibt, die nicht prim ist, dann sind alle natürlichen Zahlen nicht prim".

II.3 Semantik der klassischen Prädikatenlogik

Wir werden nun für die klassische Prädikatenlogik einen 2*–wertigen Modellbegriff* angeben. Eine abstraktere Betrachtungsweise, wie wir sie in der Untersuchung der Aussagenlogik gewählt haben, ist auch für die Prädikatenlogik möglich und fruchtbar, übersteigt aber leider die technischen Möglichkeiten dieser Vorlesung (der geeignete begriffliche Rahmen wäre die sog. "kategorielle Logik", um auch nicht–2–wertige Modelle erfassen zu können!). Konsequenterweise können wir i.a. auch kein "klassifizierendes Modell" mehr konstruieren. Stattdessen wird der nötige Vollständigkeitsbeweis für die klassische Prädikatenlogik durch eine geeignete Reduktion auf die Vollständigkeit der Aussagenlogik bzgl. 2–wertiger Modelle erfolgen. Dazu aber später!

Definition 3.1 *Sei $\mathcal{L}$ eine Sprache 1. Stufe. Eine $\mathcal{L}$–*Struktur *oder $\mathcal{L}$–*Modell *$\mathcal{M}$ ist gegeben durch*

(1) *eine nichtleere Menge $D_{\mathcal{M}} = |\mathcal{M}|$, die* dem Modell $\mathcal{M}$ zugrundeliegende Menge*, auch genannt* Domain von $\mathcal{M}$

(2) *eine Funktion $f_{\mathcal{M}} : D_{\mathcal{M}}^{ar(f)} \to D_{\mathcal{M}}$ für jedes Funktionssymbol f von $\mathcal{L}$*

(3) *eine Relation $P_{\mathcal{M}} \subseteq D_{\mathcal{M}}^{ar(P)}$ für jedes Prädikatensymbol P von $\mathcal{L}$.*[11] $\Diamond$

Für eine solche $\mathcal{L}$–Struktur $\mathcal{M}$ kann man definieren, wann eine Formel $A \in \mathsf{Fm}(\mathcal{L})$ in $\mathcal{M}$ gültig ist, allerdings nur unter zusätzlicher Berücksichtigung einer Belegung der Variablen in $D_{\mathcal{M}}$.

Definition 3.2 (Wahrheitsdefinition nach Tarski)
Sei $\mathcal{L} = (\mathcal{F}, \mathcal{P}, ar)$ eine Sprache 1. Stufe und $\mathcal{M}$ eine $\mathcal{L}$–Struktur. Die Belegungen *der Variablen aus $\mathcal{V}$ in $\mathcal{M}$ sind einfach Funktionen $v : \mathcal{V} \to D_{\mathcal{M}}$. Wir schreiben $\mathsf{Val}_{\mathcal{M}}$ für die Menge aller dieser Belegungen.*
Für $t \in \mathsf{Tm}(\mathcal{L})$ sei $[\![t]\!]^{\mathcal{M}}v \in D_{\mathcal{M}}$ wie schon zuvor in der Allgemeinen Algebra durch Induktion über den Aufbau von Termen wie folgt definiert

$$[\![x]\!]^{\mathcal{M}}v = v(x)$$

$$[\![f(t_1,\dots,t_n)]\!]^{\mathcal{M}}v = f_{\mathcal{M}}([\![t_1]\!]^{\mathcal{M}}v,\dots,[\![t_n]\!]^{\mathcal{M}}v) \qquad .$$

Durch Induktion über den Aufbau von Formeln definieren wir das (Meta–)Prädikat

$$\models_{\mathcal{M},v} A \qquad (\text{“}A \text{ ist wahr in } \mathcal{M} \text{ unter } v\text{”})$$

folgendermaßen

(1) *$\models_{\mathcal{M},v} P(t_1,\dots,t_n)$ genau dann, wenn $([\![t_1]\!]^{\mathcal{M}}v,\dots,[\![t_n]\!]^{\mathcal{M}}v) \in P_{\mathcal{M}}$*

(2) *$\models_{\mathcal{M},v} \bot$ ist immer falsch*

[11] Es sei bemerkt, daß für 0–stellige Prädikatensymbole P die Menge $P_{\mathcal{M}}$ entweder leer ist oder genau das leere Tupel $\langle\rangle$ beinhaltet. Bekanntermaßen entsprechen 0–stelllige Prädikatensymbole den propositionalen Konstanten der Aussagenlogik. Die Proposition P ist nun also wahr in $\mathcal{M}$, wenn $P_{\mathcal{M}} = \{\langle\rangle\}$, und falsch in $\mathcal{M}$, wenn $P_{\mathcal{M}} = \emptyset$.

(3) $\models_{\mathcal{M},v} A \wedge B$ *genau dann, wenn* $\models_{\mathcal{M},v} A$ und $\models_{\mathcal{M},v} B$

(4) $\models_{\mathcal{M},v} A \vee B$ *genau dann, wenn* $\models_{\mathcal{M},v} A$ oder $\models_{\mathcal{M},v} B$

(5) $\models_{\mathcal{M},v} A \to B$ *genau dann, wenn* $\models_{\mathcal{M},v} A$ impliziert $\models_{\mathcal{M},v} B$, *d.h.* nicht $\models_{\mathcal{M},v} A$ oder $\models_{\mathcal{M},v} B$

(6) $\models_{\mathcal{M},v} \forall x.A$ *genau dann, wenn* für alle $a \in D_{\mathcal{M}}$ *gilt* $\models_{\mathcal{M},v[a/x]} A$

(7) $\models_{\mathcal{M},v} \exists x.A$ *genau dann, wenn* es ein $a \in D_{\mathcal{M}}$ gibt *mit* $\models_{\mathcal{M},v[a/x]} A$

wobei $v[a/x](x) = a$ *und* $v[a/x](y) = v(y)$ *für Variable* y*, die von* x *verschieden sind.* ◊

Wir haben auf der Metaebene zur Definition der Wahrheitsbedingungen wiederum die übliche klassische Logik verwendet. Also ist unsere Metasprache *reichhaltiger* als die Objektsprache, da wir in der Metasprache über die Beziehung zwischen Formeln, Modellen und Belegungen sprechen können, was in der Objektsprache (d.h. der Sprache der Prädikatenlogik) unmöglich ist.
Die Sinnhaftigkeit der *scheinbar tautologischen* Wahrheitsdefinition à la Tarski wird später durch den Vollständigkeitssatz gerechtfertigt: auf der Metaebene können wir nämlich zeigen, daß $\vdash A$ im Kalkül des Natürlichen Schließens mithilfe der Regel (raa) genau dann herleitbar ist, wenn $\models_{\mathcal{M},v} A$ für alle $\mathcal{L}$–Strukturen $\mathcal{M}$ und alle Belegungen $v \in \mathsf{Val}_{\mathcal{M}}$ gilt. Dies ist dann nämlich eine *nicht–tautologische* Charakterisierung der Allgemeingültigkeit, d.h. der Wahrheit in allen Modellen.
Zuvor müssen wir jedoch noch einige Sprechweisen vereinbaren, einige Hilfssätze beweisen und vor allem die Korrektheit unserer Schlußregeln nachweisen.

Definition 3.3 *Sei* $\mathcal{L}$ *eine Sprache 1. Stufe.*
Eine Formel A gilt in der $\mathcal{L}$–Struktur $\mathcal{M}$ *genau dann, wenn* $\models_{\mathcal{M},v} A$ *für alle Belegungen* $v \in \mathsf{Val}_{\mathcal{M}}$*, wofür wir* $\models_{\mathcal{M}} A$ *schreiben.*
Eine Formel A *ist* allgemeingültig *genau dann, wenn* $\models_{\mathcal{M}} A$ *für alle* $\mathcal{L}$*–Strukturen* $\mathcal{M}$*, wofür wir* $\models A$ *schreiben.*
Sei $\mathcal{T} \subseteq \mathsf{Fm}(\mathcal{L})$ *und* $A \in \mathsf{Fm}(\mathcal{L})$*. Dann* folgt A semantisch aus $\mathcal{T}$ im Modell $\mathcal{M}$ *genau dann, wenn für alle* $v \in \mathsf{Val}_{\mathcal{M}}$ *gilt, daß* $\models_{\mathcal{M},v} A$*, falls* $\models_{\mathcal{M},v} C$ *für alle* $C \in \mathcal{T}$*, wofür wir* $\mathcal{T} \models_{\mathcal{M}} A$ *schreiben.*
Wenn $\mathcal{T} \models_{\mathcal{M}} A$ *für alle* $\mathcal{L}$*–Strukturen* $\mathcal{M}$ *gilt, sagen wir, daß* A semantisch aus $\mathcal{T}$ folgt *und schreiben dafür* $\mathcal{T} \models A$*.*
Insbesondere macht diese Notation Sinn für endliche $\mathcal{T} \subseteq \mathsf{Fm}(\mathcal{L})$ *wie im Falle von Sequenzen, wobei wir eine endliche Liste von Formeln mit der Menge dieser Formeln identifizieren. Eine* Sequenz $A_1, \ldots, A_n \vdash B$ gilt im Modell $\mathcal{M}$ *(Notation:* $A_1, \ldots, A_n \models_{\mathcal{M}} B$*) genau dann, wenn* $\{A_1, \ldots, A_n\} \models_{\mathcal{M}} B$*. Die* Sequenz $A_1, \ldots, A_n \vdash B$ ist allgemeingültig *(Notation:* $A_1, \ldots, A_n \models B$*) genau dann, wenn* $\{A_1, \ldots, A_n\} \models_{\mathcal{M}} B$ *für alle* $\mathcal{L}$*–Strukturen* $\mathcal{M}$*.* ◊

Warnhinweis. Wenn die Formeln aus $\mathcal{T}$ freie Variable enthalten, so ist es im allgemeinen möglich, daß A in allen Modellen wahr ist, in denen alle Formeln aus $\mathcal{T}$ wahr sind, wofür wir schreiben $A \in \mathsf{Thm}(\mathcal{T})$, *ohne daß* deswegen gleich $\mathcal{T} \models A$ gilt. Wenn aber alle Formeln aus $\mathcal{T}$ geschlossen sind, d.h. keine freien Variablen enthalten, dann ist $\mathcal{T} \models A$ äquivalent dazu, daß A in allen Modellen gilt, in denen alle Formeln aus $\mathcal{T}$ gelten.
Der Beweis letzterer Behauptung ist als Übung(!) empfohlen, wobei man folgendes Lemma verwende.

Lemma 3.4 *Sei $\mathcal{M}$ eine $\mathcal{L}$–Struktur. Dann gilt für alle Formeln $A \in \mathsf{Fm}(\mathcal{L})$ und Belegungen $v_1, v_2 \in \mathsf{Val}_{\mathcal{M}}$, daß $\models_{\mathcal{M},v_1} A$ genau dann, wenn $\models_{\mathcal{M},v_2} A$, vorausgesetzt, daß $v_1(x) = v_2(x)$ für alle $x \in \mathsf{FV}(A)$.*

Beweis: Durch Induktion über den Aufbau von A. Die Details seien dem Leser als Übung(!) überlassen. □

Ein weiterer wichtiger Hilfssatz ist folgendes

Lemma 3.5 (Substitutionslemma)
Sei $\mathcal{M}$ eine $\mathcal{L}$–Struktur. Dann gilt für alle Formeln $A \in \mathsf{Fm}(\mathcal{L})$, Variable $x \in \mathcal{V}$ und $t \in \mathsf{Tm}(\mathcal{L})$, daß

$$\models_{\mathcal{M},v} A[t/x] \qquad \textit{genau dann, wenn} \qquad \models_{\mathcal{M},v\left[[\![t]\!]^{\mathcal{M}}v/x\right]} A$$

für alle $v \in \mathsf{Val}_{\mathcal{M}}$.

Beweis: Durch Induktion über den Aufbau von A. Die Details seien dem Leser als Übung(!) überlassen. □

Das Substitutionslemma besagt, daß "syntaktische" Substitution $[t/x]$ und "semantische" Substitution $\left[[\![t]\!]^{\mathcal{M}}v/x\right]$ "vertauschbar" sind.

II.4 Korrektheit des Natürlichen Schließens

Wir zeigen nun, daß die Regeln des Kalküls des Natürlichen Schließens die Allgemeingültigkeit von Sequenzen erhalten, ja sogar die Gültigkeit in einem fixen vorab gewählten Modell.

Theorem 4.1 (Korrektheitssatz für die Prädikatenlogik)
Sei $\mathcal{L}$ eine Sprache 1. Stufe. Dann erhalten für jede $\mathcal{L}$–Struktur $\mathcal{M}$ die Regeln des Kalküls des Natürlichen Schließens die Gültigkeit in $\mathcal{M}$, d.h., daß für jede Regel

$$\frac{\Gamma_1 \vdash A_1 \quad \ldots \quad \Gamma_n \vdash A_n}{\Gamma \vdash A}$$

des Kalküls gilt, daß $\Gamma \models_{\mathcal{M}} A$, wenn $\Gamma_i \models_{\mathcal{M}} A_i$ für $i = 1, \ldots, n$.
Insbesondere gilt also für jede herleitbare Sequenz $\Gamma \vdash A$, daß $\Gamma \models A$.

Beweis: Der Beweis erfolgt durch Regelinduktion. Für die rein aussagenlogischen Regeln kann der Beweis von Satz I.5.2 nahezu wörtlich übernommen werden. Wir müssen also bloß noch die Introduktions– und Eliminationsregeln für die Quantoren betrachten.
$(\forall I)$: Sei $x \notin \mathsf{FV}(\Gamma)$ und $\Gamma \models_{\mathcal{M}} A(x)$. Zu zeigen ist $\Gamma \models_{\mathcal{M}} \forall x.A(x)$. Sei nun $v \in \mathsf{Val}_{\mathcal{M}}$ mit $\models_{\mathcal{M},v} C$ für alle C in Γ. Weil $x \notin \mathsf{FV}(\Gamma)$ gilt nun für alle $a \in D_{\mathcal{M}}$, daß $\models_{\mathcal{M},v[a/x]} C$ und somit aufgrund der Annahme $\Gamma \models_{\mathcal{M}} A(x)$ auch $\models_{\mathcal{M},v[a/x]} A(x)$, also $\models_{\mathcal{M},v} \forall x.A(x)$.
$(\forall E)$: Sei t ein Term und es gelte $\Gamma \models_{\mathcal{M}} \forall x.A(x)$. Zu zeigen ist $\Gamma \models_{\mathcal{M}} A[t/x]$. Sei nun $v \in \mathsf{Val}_{\mathcal{M}}$ mit $\models_{\mathcal{M},v} C$ für alle C in Γ. Also gilt wegen der Annahme $\Gamma \models_{\mathcal{M}} \forall x.A(x)$, daß $\models_{\mathcal{M},v} \forall x.A(x)$, d.h. $\models_{\mathcal{M},v[a/x]} A(x)$ für alle $a \in D_{\mathcal{M}}$. Indem wir für a das Objekt $[\![t]\!]^{\mathcal{M}}v$ wählen, erhalten wir $\models_{\mathcal{M},v\left[[\![t]\!]^{\mathcal{M}}v/x\right]} A(x)$ und somit nach dem Substitutionslemma 3.5, daß $\models_{\mathcal{M},v} A[t/x]$.
$(\exists I)$: Sei t ein Term und $\Gamma \models_{\mathcal{M}} A[t/x]$. Zu zeigen ist $\Gamma \models_{\mathcal{M}} \exists x.A(x)$. Sei nun $v \in \mathsf{Val}_{\mathcal{M}}$ mit $\models_{\mathcal{M},v} C$ für alle C in Γ. Es gilt dann wegen der Annahme $\Gamma \models_{\mathcal{M}} A[t/x]$, daß $\Gamma \models_{\mathcal{M},v} A[t/x]$ und somit wegen des Substitutionslemmas 3.5 auch $\Gamma \models_{\mathcal{M},v\left[[\![t]\!]^{\mathcal{M}}v/x\right]} A(x)$, d.h. $\Gamma \models_{\mathcal{M},v} \exists x.A(x)$.
$(\exists E)$: Sei $x \notin \mathsf{FV}(\Gamma, B)$ und es gelte $\Gamma \models_{\mathcal{M}} \exists x.A(x)$ und $\Gamma, A(x) \models_{\mathcal{M}} B$. Zu zeigen ist $\Gamma \models_{\mathcal{M}} B$. Sei nun $v \in \mathsf{Val}_{\mathcal{M}}$ mit $\models_{\mathcal{M},v} C$ für alle C in Γ. Wegen der Annahme $\Gamma \models_{\mathcal{M}} \exists x.A(x)$ gilt nun $\Gamma \models_{\mathcal{M},v[a/x]} A(x)$ für ein $a \in D_{\mathcal{M}}$. Weil x in Γ nicht frei vorkommt, gilt auch $\models_{\mathcal{M},v[a/x]} C$ für alle C in Γ. Also gilt wegen der Annahme $\Gamma, A(x) \models_{\mathcal{M}} B$, daß $\models_{\mathcal{M},v[a/x]} B$. Weil aber x in B nicht frei vorkommt gilt auch $\models_{\mathcal{M},v} B$, wie zu zeigen war. $\square$

II.5 Henkinerweiterungen, Kompaktheitssatz und der Satz von Löwenheim–Skolem

Es kann eine Existenzaussage $\exists x.A(x)$ in einer $\mathcal{L}$–Struktur gelten, obwohl für keinen geschlossenen Term t gilt, daß $A(t)$. Ein Beispiel dafür ist der Körper $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen mit Funktionssymbolen für Addition und Multiplikation und Konstanten für 0 und 1. Also werden alle geschlossenen Terme in $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$ interpretiert. Es gilt in $\mathbb{R}$ die Existenzaussage $\exists x.2{=}x{\cdot}x$ (etwa indem man für x die irrationale Zahl $\sqrt{2}$ wählt), jedoch gibt es keinen geschlossenen Term t mit $2{=}t{\cdot}t$, da es keine natürliche Zahl gibt, deren Quadrat 2 ist. Ein anderes Beispiel ist die sogenannte "Deppenformel" $\exists x.(P(x) \to \forall x.P(x))$, wobei P ein 1–stelliges Prädikatensymbol ist. Diese Formel ist in der reinen klassischen Prädikatenlogik herleitbar, aber es gibt keinen Term t, sodaß $P(t) \to \forall x.P(x)$ herleitbar ist.
Dieses Problem kann aber behoben werden, indem man genügend viele neue Konstante zur Sprache $\mathcal{L}$ hinzunimmt.

Definition 5.1 *Sei $\mathcal{L}$ eine Sprache 1. Stufe.*

Die Folge $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *sei rekursiv definiert als*

$$C_0 = \emptyset \qquad\qquad C_{n+1} = \{c_{A(x)} \mid A(x) \in \mathsf{Fm}(\mathcal{L}(C_n)) \text{ und } \mathsf{FV}(A(x)) \subseteq \{x\}\}$$

wobei $\mathcal{L}(C_n) = \mathcal{L} \cup C_n$. *Wir nennen* $C = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} C_n$ *die Menge der* Henkin–Konstanten *und* $\mathcal{L}(C) = \mathcal{L} \cup C$ *die* Henkin–Erweiterung von $\mathcal{L}$. $\Diamond$

Die Intention hinter dieser Definition von Henkin–Erweiterungen ist, für jedes in der Sprache $\mathcal{L}(C)$ definierbare 1–stellige Prädikat $A(x)$ eine Henkin–Konstante $c_{A(x)}$ bereitzustellen, für die gilt

$$A(c_{A(x)}) \leftrightarrow \exists x.A(x)$$

wie in den in der nächsten Definition eingeführten *Henkin–Axiomen* gefordert wird. Offenbar gilt dann für das Prädikat $\neg A(x)$, daß $\neg A(c_{\neg A(x)}) \leftrightarrow \exists x.\neg A(x)$ und somit

$$A(c_{\neg A(x)}) \leftrightarrow \forall x.A(x)$$

da $A(c_{\neg A(x)}) \leftrightarrow \neg\exists x.\neg A(x)$ und $\neg\exists x.\neg A(x) \leftrightarrow \forall x.A(x)$.

Definition 5.2 *Die Menge* $\mathcal{T}_{\mathsf{Henkin}}$ *der sogenannten* Henkin–Axiome *für die Henkin–Erweiterung* $\mathcal{L}(C)$ *besteht aus den Formeln der Gestalt*

(I) $\exists x.A(x) \to A(c_{A(x)})$

(II) $A(c_{\neg A(x)}) \to \forall x.A(x)$

(III) $\forall x.A(x) \to A(t)$

(IV) $A(t) \to \exists x.A(x)$

wobei $A(x)$ *eine Formel der Sprache* $\mathcal{L}(C)$ *ist, in der höchstens* x *frei vorkommt, und* t *ein beliebiger geschlossener*[12] *Term der Sprache* $\mathcal{L}(C)$ *ist.* $\Diamond$

Beachte, daß aus (I) und (IV) folgt $A(c_{A(x)}) \leftrightarrow \exists x.A(x)$ und aus (II) und (III), daß $A(c_{\neg A(x)}) \leftrightarrow \forall x.A(x)$.

Lemma 5.3 *Mithilfe der Henkin–Axiome ist ist jede geschlossene* $\mathcal{L}(C)$*–Formel beweisbar äquivalent zu einer quantorenfreien* $\mathcal{L}(C)$*–Formel, wobei dieser Beweis keine Quantorenregeln verwendet.*

Beweis: Einfache Übung! $\Box$

Die Henkin–Axiome erlauben uns, die klassische Prädikatenlogik auf die klassische Aussagenlogik zu reduzieren, wie in folgendem "Hauptlemma für Henkin–Erweiterungen" präzise gefaßt wird.

[12]d.h. $V(t) = \emptyset$

Lemma 5.4 (Hauptlemma für Henkin–Erweiterungen)
Sei $\mathcal{L}$ eine Sprache 1. Stufe und $\mathcal{T}$ eine Menge geschlossener Formeln der Sprache $\mathcal{L}$. Dann ist $\mathcal{T}$ erfüllbar, d.h. es gibt eine $\mathcal{L}$–Struktur $\mathcal{M}$ mit $\models_{\mathcal{M}} C$ für alle $C \in \mathcal{T}$, genau dann, wenn $\mathcal{T} \cup \mathcal{T}_{\mathsf{Henkin}}$ rein aussagenlogisch konsistent *ist, d.h. es gibt eine Funktion ν, die jeder geschlossenen $\mathcal{L}(C)$–Formel einen Wahrheitswert (tt oder ff) zuordnet, sodaß*

$$\begin{array}{ll} \text{(i)} & \nu(A \wedge B) = \nu(A) \wedge_{\mathbb{B}} \nu(B) \\ \text{(i)} & \nu(A \vee B) = \nu(A) \vee_{\mathbb{B}} \nu(B) \\ \text{(ii)} & \nu(A \to B) = \nu(A) \to_{\mathbb{B}} \nu(B) \\ \text{(iv)} & \nu(\bot) = \mathsf{ff} \end{array}$$

und $\nu(A) = \mathsf{tt}$ für alle geschlossenen Formeln $A \in \mathcal{T} \cup \mathcal{T}_{\mathsf{Henkin}}$.

Beweis: Wenn $\mathcal{M}$ ein Modell für $\mathcal{T}$ ist, dann kann man die Interpretation der Henkin–Konstanten so wählen, daß alle Henkin–Axiome erfüllt sind. Also hat dann $\mathcal{T} \cup \mathcal{T}_{\mathsf{Henkin}}$ ein Modell $\mathcal{M}'$. Definiere dann ν für geschlossene Formeln A in $\mathcal{L}(C)$ wie folgt: $\nu(A) = \mathsf{tt}$, wenn $\models_{\mathcal{M}'} A$, und $\nu(A) = \mathsf{ff}$ sonst. Aufgrund dieses ν ist dann $\mathcal{T} \cup \mathcal{T}_{\mathsf{Henkin}}$ offensichtlich rein aussagenlogisch konsistent.

Für die Rückrichtung nehmen wir an, ν sei eine Funktion, die die geschlossenen $\mathcal{L}(C)$–Formeln derart auf Wahrheitswerte abbildet, daß die Bedingungen (i),(ii),(iii),(iv) erfüllt sind und $\nu(A) = \mathsf{tt}$ für alle $A \in \mathcal{T} \cup \mathcal{T}_{\mathsf{Henkin}}$. Wir konstruieren nun aus ν ein Modell $\mathcal{M}$ für $\mathcal{T} \cup \mathcal{T}_{\mathsf{Henkin}}$ wie folgt: die zugrundeliegende Menge $D_{\mathcal{M}}$ sei die Menge der geschlossenen Terme der Sprache $\mathcal{L}(C)$, für ein n–stelliges Funktionssymbol f sei seine Interpretation in $\mathcal{M}$ gegeben durch $f_{\mathcal{M}}(t_1, \ldots, t_n) \equiv f(t_1, \ldots, t_n)$ und für ein n–stelliges Relationssymbol P sei seine Interpretation in $\mathcal{M}$ gegeben durch $P_{\mathcal{M}} = \{(t_1, \ldots, t_n) \in D_{\mathcal{M}}^n \mid \nu(P(t_1, \ldots, t_n)) = \mathsf{tt}\}$.
Wir beweisen nun durch Induktion über den Aufbau von Formeln A der Sprache $\mathcal{L}(C)$, daß

$$(\dagger) \qquad \models_{\mathcal{M},v} A \qquad \text{genau dann, wenn} \qquad \nu(A[v]) = \mathsf{tt}$$

für alle Belegungen $v \in \mathsf{Val}_{\mathcal{M}}$, wobei $A[v]$ diejenige geschlossene Formel bezeichnet, die aus A hervorgeht, indem man jedes freie Vorkommen einer Variablen x in A durch den geschlossenen Term $v(x)$ ersetzt.
Für atomare Formeln folgt die Behauptung ($\dagger$) unmittelbar aus der Definition der Interpretation der Relationssymbole und wegen $\nu(\bot) = \mathsf{ff}$.
Für Sätze der Gestalt $A_1 \Box A_2$ mit $\Box \in \{\wedge, \vee, \to\}$ folgt die Behauptung ($\dagger$) unter der Annahme, daß A_1 und A_2 die Bedingung ($\dagger$) erfüllen, weil $\nu(A_1 \Box A_2) = \nu(A_1) \Box_{\mathbb{B}} \nu(A_2)$ für $\Box \in \{\wedge, \vee, \to\}$.
Wir betrachten nun die Quantoren. Angenommen Bedingung ($\dagger$) gilt für die Formel $A(x)$. Wir müssen nun zeigen, daß ($\dagger$) auch für die Formeln $\exists x.A(x)$ und $\forall x.A(x)$ gilt. Sei $v \in \mathsf{Val}_{\mathcal{M}}$, d.h. $v : \mathcal{V} \to D_{\mathcal{M}}$. Wir schreiben $A'(x)$ für die Formel, die man aus $A(x)$ erhält, indem man alle Vorkommen freier Variablen y,

die von x verschieden sind, durch $v(y)$ ersetzt. Offenbar gilt unter dieser Setzung $(Qx.A(x))[v] \equiv Qx.A'(x)$ für $Q \in \{\exists, \forall\}$.

Angenommen $\nu((\exists x.A(x))[v]) = \mathsf{tt}$. Somit also auch $\nu(\exists x.A'(x)) = \mathsf{tt}$. Weil die Henkinaxiome alle durch ν wahr gemacht werden, gilt auch $\nu(A'(c_{A'(x)})) = \mathsf{tt}$. Da $A'(c_{A'(x)}) \equiv A(x)\big[v[c_{A'(x)}/x]\big]$ gilt aufgrund der Induktionshypothese für $A(x)$, daß $\models_{\mathcal{M},v[c_{A'(x)}/x]} A(x)$ und somit auch $\models_{\mathcal{M},v} \exists x.A(x)$.
Wenn andererseits $\models_{\mathcal{M},v} \exists x.A(x)$, dann gibt es ein $t \in D_{\mathcal{M}}$ mit $\models_{\mathcal{M},v[t/x]} A(x)$. Aufgrund der Induktionshypothese für $A(x)$ folgt, daß $\nu(A(x)\,[v[t/x]]) = \mathsf{tt}$. Offenbar ist $A(x)[v[t/x]] \equiv A'(t)$ und somit $\nu(A'(t)) = \mathsf{tt}$. Da alle Henkin–Axiome von ν wahr gemacht werden, gilt $\nu(\exists x.A'(x)) = \mathsf{tt}$ und somit $\nu((\exists x.A(x))[v]) = \mathsf{tt}$.

Angenommen $\nu((\forall x.A(x))[v]) = \mathsf{tt}$. Dann gilt für alle geschlossenen Terme t der Sprache $\mathcal{L}(C)$, daß $\nu(A'(t)) = \mathsf{tt}$, da ν ja alle Henkin–Axiome wahr macht. Da $A'(t) \equiv A(x)[v[t/x]]$, folgt aufgrund der Induktionshypothese für A, daß $\models_{\mathcal{M},v[t/x]} A(x)$. Also gilt $\models_{\mathcal{M},v[t/x]} A(x)$ für alle $t \in D_{\mathcal{M}}$ und somit $\models_{\mathcal{M},v} \forall x.A(x)$.
Angenommen $\models_{\mathcal{M},v} \forall x.A(x)$. Dann gilt auch $\models_{\mathcal{M},v[c_{\neg A'(x)}/x]} A(x)$. Aufgrund der Induktionshypothese für $A(x)$ folgt, daß $\nu(A(x)\big[v[c_{\neg A'(x)}/x]\big]) = \mathsf{tt}$. Da offenbar $A(x)\big[v[c_{\neg A'(x)}/x]\big] \equiv A'(c_{\neg A'(x)})$, gilt also $\nu(A'(c_{\neg A'(x)})) = \mathsf{tt}$. Da ν das Henkin–Axiom $A'(c_{\neg A'(x)}) \to \forall x.A'(x)$ wahr macht, folgt nun, daß $\nu(\forall x.A'(x)) = \mathsf{tt}$, und somit $\nu((\forall x.A(x))[v]) = \mathsf{tt}$. □

Wir nennen die im Beweis von Lemma 5.4 aus propositionalen Belegungen ν konstruierten Modelle auch *Henkinmodelle*, welche man gewissermaßen als eine Art "verallgemeinerte Termmodelle" betrachten kann, da die zugrundeliegenden Mengen ja genau die geschlossenen Terme der Sprache $\mathcal{L}(C)$ sind.

Theorem 5.5 (Satz von Löwenheim und Skolem)
Sei $\mathcal{L}$ eine abzählbare[13] *Sprache 1. Stufe und $\mathcal{T}$ eine erfüllbare Menge von geschlossenen Formeln der Sprache $\mathcal{L}$.*
Dann besitzt $\mathcal{T}$ insbesondere auch ein abzählbares Modell.

Beweis: Wenn $\mathcal{T}$ ein Modell besitzt, dann ist $\mathcal{T} \cup \mathcal{T}_{\mathsf{Henkin}}$ aufgrund von Lemma 5.4 rein aussagenlogisch konsistent und besitzt somit wiederum aufgrund von Lemma 5.4 ein Henkinmodell $\mathcal{M}$. Da $\mathcal{L}$ und somit auch $\mathcal{L}(C)$ abzählbar sind, ist die $\mathcal{M}$ zugrundeliegende Menge $D_{\mathcal{M}}$ geschlossener Terme der Sprache $\mathcal{L}(C)$ auch abzählbar. Also besitzt $\mathcal{T}$ ein abzählbares Modell. □

Bemerkung. Die axiomatische Mengenlehre ist eine Theorie über einer Sprache 1. Stufe, die bloß die beiden 2–stelligen Relationssymbole $=$ und $\in$ enthält und somit abzählbar ist. Aufgrund des Satzes 5.5 von Löwenheim und Skolem besitzt also die axiomatische Mengenlehre ein abzählbares Modell, das ganz sicher nicht als Standardmodell zu betrachten ist, da die axiomatische Mengenlehre ja die

[13] d.h., daß die Menge der Funktions– und Prädikatensymbole abzählbar ist

Existenz überabzählbarer Mengen wie z.B. $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ postuliert. Dieses Phänomen nennt man oft auch *Skolemsches Paradoxon.*
Eine weitere Konsequenz des Satzes von Löwenheim und Skolem ist, daß man die Struktur der reellen Zahlen nicht mithilfe einer abzählbaren Sprache axiomatisieren kann.

Theorem 5.6 (Kompaktheitssatz für die Prädikatenlogik)
Sei $\mathcal{T}$ eine Menge von Sätzen, d.h. geschlossenen Formeln, einer Sprache 1. Stufe. Wenn jede endliche Teilmenge $\mathcal{T}_0$ von $\mathcal{T}$ ein Modell besitzt, dann besitzt auch $\mathcal{T}$ selbst ein Modell.

Beweis: Wenn jede endliche Teilmenge $\mathcal{T}_0$ von $\mathcal{T}$ ein Modell besitzt, dann ist aufgrund von Lemma 5.4 für jede endliche Teilmenge $\mathcal{T}_0$ von $\mathcal{T}$ die Satzmenge $\mathcal{T}_0 \cup \mathcal{T}_{\mathsf{Henkin}}$ rein aussagenlogisch konsistent. Wegen des Kompaktheitssatzes für die Aussagenlogik ist dann aber $\mathcal{T} \cup \mathcal{T}_{\mathsf{Henkin}}$ selbst rein aussagenlogisch konsistent. Somit besitzt $\mathcal{T}$ wegen Lemma 5.4 ein Modell. □

II.6 Einige Anwendungen des Kompaktheitssatzes

Die Hauptanwendung des Kompaktheitssatzes für die Prädikatenlogik besteht vor allem darin, die Existenz nicht–intendierter Modelle, sogenannter *Nichtstandardmodelle*, zu zeigen, insbesondere auch für Theorien, die aus *allen* in einem Standardmodell gültigen Sätzen bestehen, woraus folgt, daß dieses Standardmodell nicht durch eine Theorie 1. Stufe axiomatisiert werden kann.

Theorem 6.1 *Die Peano–Arithmetik (siehe Definition 1.10) besitzt ein Modell $\mathcal{M}$, das ein Element a enthält, das von keinem der geschlossenen Terme $\underline{n} \equiv succ^n(zero)$ denotiert wird, d.h. $[\![succ^n(zero)]\!] \neq_{\mathcal{M}} a$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Es ist also "nicht jedes Element in $\mathcal{M}$ eine natürliche Zahl".*

Beweis: Sei $\mathcal{T}_{\mathrm{PA}}$ die Menge der Peano–Axiome, genauer gesagt ihr universeller Abschluß, d.h. freie Variable in den Axiomen werden durch zusätzliche Allquantoren gebunden.
Wir erweitern die Sprache um eine neue Konstante c. Sei $\mathcal{T} := \{\neg c{=}\underline{n} \mid n{\in}\mathbb{N}\}$. Weil jede endliche Teilmenge von $\mathcal{T}_{\mathrm{PA}} \cup \mathcal{T}$ ein Modell in $\mathbb{N}$ hat, indem man c durch eine genügend große natürliche Zahl interpretiert, folgt aufgrund des Kompaktheitssatzes für die Prädikatenlogik, daß $\mathcal{T}_{\mathrm{PA}} \cup \mathcal{T}$ selbst ein Modell $\mathcal{M}$ besitzt. In diesem Modell $\mathcal{M}$ ist dann die Interpretation von c verschieden von der Interpretion aller Numerale $\underline{n}$. □

Man beachte, daß nirgendwo im Beweis verwendet wurde, daß $\mathcal{T}_{\mathrm{PA}}$ gerade die Menge der Peano–Axiome war. Man kann stattdessen die Menge $\mathsf{Thm}(\mathbb{N})$ aller im Standardmodell gültigen geschlossenen Formeln der Sprache der Peano–Arithmetik betrachten und mit einem nahezu gleichlautenden Beweis zeigen, daß

$\mathsf{Thm}(\mathbb{N})$ ein Modell besitzt, in dem ein Objekt a existiert, das von der Interpretation aller Numerale $\underline{n}$ verschieden ist. Man kann also die Strukur $\mathbb{N}$ *nicht vollständig* (bis auf Isomorphie) *durch Axiome 1. Stufe in der Sprache der Peano–Arithmetik charakterisieren.* Man überlegt sich leicht, daß dem auch nicht durch etwaige Spracherweiterungen abgeholfen werden kann, solange die Axiome 1. Stufe sind (Übung!).

Theorem 6.2 *Sei $\mathcal{L}$ eine Sprache 1. Stufe und $\mathcal{T}$ eine Menge von Sätzen in der Sprache $\mathcal{L}$, sodaß $\mathcal{L}$ ein Gleichheitsprädikat enthält und $\mathcal{T}$ alle Gleichheitsaxiome dafür postuliert. Wenn $\mathcal{T}$ beliebig große endliche Modelle hat, so hat $\mathcal{T}$ auch ein unendliches Modell.*

Beweis: Wie erweitern $\mathcal{L}$ um abzählbar unendlich viele neue 0–stellige Konstanten $c_0, c_1, \ldots, c_n, \ldots$ und fügen zu $\mathcal{T}$ die Axiomenmenge

$$\mathcal{T}' := \{\neg c_i{=}c_j \mid i{\neq}j \text{ und } i,j{\in}\mathbb{N}\}$$

hinzu. Jede endliche Teilmenge $\mathcal{T}_0$ von $\mathcal{T} \cup \mathcal{T}'$ besitzt ein Modell, indem man in einem genügend großen Modell $\mathcal{M}$ von $\mathcal{T}$ die endlich vielen in $\mathcal{T}_0 \cup \mathcal{T}'$ vorkommenden Konstanten c_i durch verschiedene Objekte von $\mathcal{M}$ interpretiert (was ja möglich ist, da man $\mathcal{M}$ genügend groß gewählt hat). Also hat aufgrund des Kompaktheitssatzes für die Prädikatenlogik $\mathcal{T} \cup \mathcal{T}'$ ein Modell. Die Interpretation der Konstanten c_i in diesem Modell stellen dann unendlich viele verschiedene Objekte in diesem Modell bereit. $\square$

Konsequenterweise sind also endliche Monoide, endliche Gruppen, endliche Ringe und endliche Körper als Klassen von Strukturen nicht durch Axiome 1. Stufe axiomatisierbar, da es ja beliebig große endliche Monoide, Gruppen, Ringe und Körper gibt. Jede einzelne dieser Strukturen ist natürlich als solche durch eine Menge von Axiomen 1. Stufe axiomatisierbar.

Wir haben gesehen, daß $\mathbb{N}$ durch Axiome 1. Stufe nicht vollständig axiomatisert werden kann, auch wenn man das Induktionsaxiom für alle Prädikate postuliert, die sich in der Logik 1. Stufe ausdrücken lassen. Mit derselben auf dem Kompaktheitssatz für die Prädikatenlogik basierenden Argumentationsweise kann man zeigen, daß die in der Informatik betrachteten abzählbar unendlichen Strukturen wie

- Listen über einem abzählbaren Alphabet
- endliche Teilmengen einer abzählbaren Menge
- Bäume mit Markierungen in einer abzählbaren Menge u.v.a.

nicht vollständig (bis auf Isomorphie) durch Axiome 1. Stufe axiomatisiert werden können. Dessen ungeachtet erlauben jedoch die üblicherweise geforderten Induktionsaxiome für Prädikate 1. Stufe, die meisten interessanten Sätze herzuleiten!

II.7 Vollständigkeit der Prädikatenlogik

Wir beweisen nun, daß allgemeingültige Formeln und Sequenzen auch tatsächlich im klassischen Kalkül des Natürlichen Schließens hergeleitet werden können.

Theorem 7.1 (Vollständigkeit der klassischen Prädikatenlogik)
Sei $\mathcal{L}$ eine Sprache 1. Stufe und $\mathcal{T}$ eine Menge von geschlossenen Formeln in der Sprache $\mathcal{L}$.
Für jede geschlossene Formel A der Sprache $\mathcal{L}$ mit $\mathcal{T} \models A$ gibt es eine endliche Teilmenge $\{A_1, \ldots, A_n\}$ von $\mathcal{T}$, sodaß die Sequenz $A_1, \ldots, A_n \vdash A$ im klassischen Kalkül des Natürlichen Schließens hergeleitet werden kann.

Beweis: Wenn $\mathcal{T} \models A$, dann ist $\mathcal{T} \cup \{\neg A\}$ unerfüllbar. Wegen Lemma 5.4 ist die Menge $\mathcal{T} \cup \{\neg A\} \cup \mathcal{T}_{\mathsf{Henkin}}$ rein aussagenlogisch inkonsistent. Wegen des Kompaktheitssatzes für die Aussagenlogik gibt es deshalb bereits eine endliche Teilmenge $\mathcal{T}_0$ von $\mathcal{T} \cup \{\neg A\} \cup \mathcal{T}_{\mathsf{Henkin}}$, die rein aussagenlogisch inkonsistent ist. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit enthalte $\mathcal{T}_0$ den Satz $\neg A$. Sei $\mathcal{T}_1 := \mathcal{T}_0 \setminus \{\neg A\}$. Wegen des Vollständigkeitssatzes für die Aussagenlogik gilt, daß die Sequenz $\mathcal{T}_1, \neg A \vdash \perp$ rein aussagenlogisch hergeleitet werden kann. Also kann auch $\mathcal{T}_1 \vdash \neg\neg A$ rein aussagenlogisch hergeleitet werden und somit auch $\mathcal{T}_1 \vdash A$ mithilfe von (raa).
Wir teilen nun $\mathcal{T}_1$ auf in $\Gamma := \mathcal{T}_1 \cap \mathcal{T}$ und $\Delta := \mathcal{T}_1 \cap \mathcal{T}_{\mathsf{Henkin}}$. Es gilt dann nach wie vor, daß $\Delta, \Gamma \vdash A$ rein aussagenlogisch herleitbar ist. Da alle Henkin–Axiome in der Sprache $\mathcal{L}(C)$ formuliert sind, können wir alle in Δ vorkommenden Henkin–Konstanten durch *frische* Variablen ersetzten, die in $\Gamma \cup \Delta$ nicht vorkommen, bzw. die Henkin-Konstanten selbst als Variablen auffassen.
Henkin–Axiome der Gestalt (III) und (IV) sind dann rein prädikatenlogisch herleitbar. Sei $B_1, \ldots, B_m$ eine wiederholungsfreie Aufzählung derjenigen Formeln in Δ, die von Henkin–Axiomen der Gestalt (I) oder (II) herrühren, wobei Henkin–Axiome der Gestalt $B(c_{\neg B(x)}) \to \forall x.B(x)$ durch die beweisbar äquivalenten Henkin–Axiome $\exists x.\neg B(x) \to \neg B(c_{\neg B(x)})$ ersetzt werden.
Wir wissen nun, daß $B_1, \ldots, B_m, \Gamma \vdash A$ in der klassischen Prädikatenlogik herleitbar ist. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit erfülle die Aufzählung $B_1, \ldots, B_m$ die Anforderung, daß $\rho(B_i) \geq \rho(B_{i+1})$ für $i=1, \ldots, m-1$, wobei für eine Formel $B \in \mathsf{Fm}(\mathcal{L}(C))$ ihr *Rang* $\rho(B)$ als die kleinste natürliche Zahl k definiert sei, sodaß $B \in \mathsf{Fm}(\mathcal{L}(C_k))$. Dies gewährleistet, daß für ein Henkin–Axiom B_i der Gestalt $\exists x.B'_i(x) \to B'_i(c_{B'_i(x)})$ die Henkin–Konstante $c_{B'_i(x)}$ in den B_j mit $j>i$ nicht mehr vorkommt.[14] Somit können wir Lemma 2.2(1) sukzessive anwenden, um die

[14]Für Henkin–Axiome B_j mit $j>i$ der Gestalt $\exists x.B'_j(x) \to B'_j(c_{B'_j(x)})$ gilt, daß $B'_j(x) \in \mathsf{Fm}(\mathcal{L})$ oder $\rho(B'_j(x)) < \rho(B_j) \leq \rho(B_i)$, woraus folgt, daß die in $B'_j(x)$ vorkommenden Henkin–Konstanten verschieden von der Henkin–Konstante $c_{B'_i(x)}$ sind, da andernfalls $\rho(B_j) > \rho(B_i)$. Somit sind alle in den B_j mit $j>i$ vorkommenden Henkin–Konstanten verschieden von $c_{B'_i(x)}$, da ja die Aufzählung $B_1, \ldots, B_m$ wiederholungsfrei ist und somit für alle $j>i$ die Henkin–Konstante $c_{B'_j(x)}$ verschieden von $c_{B'_i(x)}$ ist.

B_i der Reihe nach aus dem Kontext $B_1, \ldots, B_m, \Gamma$ zu eliminieren.
Also ist $\Gamma \vdash A$ in der klassischen Prädikatenlogik herleitbar. $\square$

Folgende Konsequenz des Vollständigkeitssatzes ist oft sehr nützlich.

Korollar 7.2 *Sei $\mathcal{T}$ eine Menge von Sätzen und A ein Satz in der Sprache $\mathcal{L}$. Wenn für keine endliche Teilmenge Γ von $\mathcal{T}$ die Sequenz $\Gamma \vdash A$ herleitbar ist, dann gibt es eine $\mathcal{L}$–Struktur, in der sowohl alle Sätze von $\mathcal{T}$ als auch der Satz $\neg A$ gelten.*

Beweis: Die Kontraposition von Theorem 7.1 besagt, daß A nicht aus $\mathcal{T}$ folgt, weil sonst im Widerspruch zu unserer Annahme die Sequenz $\Gamma \vdash A$ für ein endliches $\Gamma \subseteq \mathcal{T}$ herleitbar wäre. Wenn aber A nicht aus Γ folgt, dann gibt eine $\mathcal{L}$–Struktur, in der alle Sätze aus $\mathcal{T}$ gelten, nicht aber A, und in der deshalb $\neg A$ gilt. $\square$

Indem man A in Korollar 7.2 speziell als $\bot$ wählt, ergibt sich folgende bemerkenswerte Konsequenz: wenn $\mathcal{T}$ konsistent ist, d.h. aus $\mathcal{T}$ kein Widerspruch herleitbar ist, dann hat $\mathcal{T}$ ein Modell. Also besitzt $\mathcal{T}$ genau dann ein Modell, wenn aus $\mathcal{T}$ kein Widerspruch herleitbar ist.

II.8 Resolutionsverfahren für die Prädikatenlogik

Der Kalkül des Natürlichen Schließens eignet sich nicht besonders für die Zwecke des automatischen Beweisens, da das Suchen nach Herleitungsbäumen zu aufwendig ist. Für die Aussagenlogik haben wir das für diesen Zweck geeignetere Resolutionsverfahren kennengelernt. In diesem Abschnitt werden wir das Resolutionsverfahren auf die Prädikatenlogik erweitern, was wiederum durch Reduktion auf die Aussagenlogik geschehen wird.
Zuerst zeigen wir, daß die Erfüllbarkeit eines Satzes A der Sprache $\mathcal{L}$ äquivalent ist zur Erfüllbarkeit einer quantorenfreien Formel $\widetilde{A}$ in einer reichhaltigeren Sprache $\widetilde{\mathcal{L}}$.

Definition 8.1 *Eine Formel A der Sprache $\mathcal{L}$ ist in* Pränex–Normalform *genau dann, wenn*

$$A \equiv Q_1 x_1 \ldots Q_n x_n.\, A_0(x_1, ..., x_n)$$

wobei A_0 eine quantorenfreie Formel in $\mathcal{L}$ ist und die $Q_i \in \{\forall, \exists\}$. $\Diamond$

Lemma 8.2 *Jede Formel der Spache $\mathcal{L}$ ist beweisbar äquivalent zu einer Formel in Pränex–Normalform.*

Beweis: Man kann die in einer gegebenen Formel vorkommenden Implikationen $A \to B$ durch $\neg A \vee B$ ersetzen und dann die Quantoren durch iterierte Anwendung folgender in der klassischen Prädikatenlogik beweisbarer Äquivalenzen nach ganz außen schieben:

(1) $\neg\exists x.A \dashv\vdash \forall x.\neg A$ und $\neg\forall x.A \dashv\vdash \exists x.\neg A$

(2) $(Qx.A(x)) \wedge B \dashv\vdash Qx.(A(x) \wedge B)$ für $Q \in \{\exists, \forall\}$ vorausgesetzt $x \notin \mathsf{FV}(B)$

(3) $(Qx.A(x)) \vee B \dashv\vdash Qx.(A(x) \vee B)$ für $Q \in \{\exists, \forall\}$ vorausgesetzt $x \notin \mathsf{FV}(B)$.

□

Für Formeln in Pränex–Normalform kann man die Quantoren durch sogenannte *Skolem–Funktionen* eliminieren. Allerdings erhält diese Umformung nicht logische Äquivalenz, sondern bloß die Erfüllbarkeit, was aber für unsere Zwecke in diesem Abschnitt ausreicht, da wir ja die Unerfüllbarkeit von $\neg A$ zeigen wollen, um die Allgemeingültigkeit von A nachzuweisen.
Wir illustrieren die Grundidee der *Skolemisierung* anhand des folgenden typischen Beispiels. Sei $\forall x.\exists y.A(x,y)$ ein Satz der Sprache $\mathcal{L}$ und besitze ein Modell $\mathcal{M}$. Sei f ein *neues* 1–stelliges Funktionssymbol und $\widetilde{\mathcal{L}} = \mathcal{L} \cup \{f\}$, dann ist der Satz $\forall x.A(x, f(x))$ erfüllbar, nämlich durch die $\widetilde{\mathcal{L}}$–Struktur $\widetilde{\mathcal{M}}$, die sich von $\mathcal{M}$ bloß dadurch unterscheidet, daß man das neue Funktionssymbol als eine Funktion f interpretiert, die für jedes $a \in D_{\mathcal{M}}$ ein $f(a)$ mit $A(a, f(a))$ liefert. Die Existenz eines solchen f wird durch die Gültigkeit von $\forall x.\exists y.A(x,y)$ in $\mathcal{M}$ sichergestellt. Wenn andererseits $\forall x.A(x, f(x))$ in einer $\widetilde{\mathcal{L}}$–Struktur $\widetilde{\mathcal{L}}$ gilt, dann gilt auch $\forall x.\exists y.A(x,y)$ in $\widetilde{\mathcal{M}}$, woraus folgt, daß $\forall x.\exists y.A(x,y)$ auch in derjenigen $\mathcal{L}$–Struktur $\mathcal{M}$ gilt, die man aus $\widetilde{\mathcal{M}}$ dadurch erhält, indem man die Interpretation von f vergißt. Zusammenfassend erhalten wir also, daß

$$\forall x.\exists y.A(x,y) \text{ erfüllbar} \quad \text{genau dann, wenn} \quad \forall x.A(x, f(x)) \text{ erfüllbar.}$$

Definition 8.3 (Skolemisierung)
Sei $A \equiv Q_1 x_1 \ldots Q_n x_n.\, A_0(x_1, \ldots, x_n)$ eine geschlossene Formel, wobei die Q_i Quantoren sind und $A_0(x_1, \ldots, x_n)$ eine quantorenfreie Formel.
Für jedes i mit $Q_i \equiv \exists$ werde jedes Vorkommen von x_i in $A_0(x_1, \ldots, x_n)$ durch den Term $f_i(x_1^{(i)}, \ldots, x_{n_i}^{(i)})$ ersetzt, wobei f_i ein neues Funktionssymbol ist, die sogenannte Skolemfunktion für den Quantor $\exists x_i$.*, und $x_1^{(i)}, \ldots, x_{n_i}^{(i)}$ diejenige Teilliste von $x_1, \ldots, x_{i-1}$ ist, die aus den x_j mit $j<i$ und $Q_j \equiv \forall$ besteht. Die so erhaltene quantorenfreie Formel nennen wir* Skolemform *bzw.* Skolemisierung von A. ◊

Eine geschlossene Formel in Pränex–Normalform ist genau dann erfüllbar, wenn ihre Skolemisierung erfüllbar ist. Also ist die Erfüllbarkeit einer allgemeinen prädikatenlogischen Formel äquivalent zur Erfüllbarkeit einer quantorenfreien Formel, nämlich der Skolemisierung der Pränex–Normalform der ursprünglichen Formel.

Der folgende *Satz von Herbrand* erlaubt die Reduktion der Erfüllbarkeit quantorenfreier Formeln A auf die rein aussagenlogische Konsistenz der Menge ihrer Substitutionsinstanzen, d.h. die Menge aller Formeln der Gestalt $A[\sigma]$, wobei σ eine beliebige Substitution ist.

Theorem 8.4 (Satz von Herbrand)
Eine quantorenfreie Formel A der Sprache $\mathcal{L}$ ist genau dann erfüllbar, wenn die Menge der Substitutionsinstanzen von A rein propositional konsistent ist.

Beweis: Wenn $\models_{\mathcal{M}} A$, dann gilt auch $\models_{\mathcal{M}} A[\sigma]$ für alle Substitutionen σ, d.h. $\mathcal{M}$ erfüllt auch alle Substitutionsinstanzen von A.
Für die Rückrichtung nehmen wir an, die Menge aller Substitutionsinstanzen von A sei rein propositional konsistent. Sei $\mathcal{L}'$ die Erweiterung von $\mathcal{L}$ um abzählbar unendlich viele Konstanten. Sei $\mathrm{GI}(A)$ die Menge aller Formeln, die man aus A erhält, indem man alle freien Variablen von A durch variablenfreie Terme der Sprache $\mathcal{L}'$ ersetzt. Offenbar ist auch $\mathrm{GI}(A)$ rein propositional konsistent, weil ja sonst die Menge der Substitutionsinstanzen von A rein propositional inkonsistent wäre. Also gibt es eine Belegung ν der geschlossenen atomaren Formeln der Sprache $\mathcal{L}'$ mit Wahrheitswerten, die alle Grundinstanzen von A wahrmacht. Aus diesem ν konstruieren wir ein Modell $\mathcal{H}$, das A erfüllt, wie folgt:

- $D_{\mathcal{H}}$ ist die Menge der variablenfreien Terme der Sprache $\mathcal{L}'$
- $f_{\mathcal{H}}(t_1, \ldots, t_n) = f(t_1, \ldots, t_n)$ für Funktionssymbole der Stelligkeit n
- $P_{\mathcal{H}} = \{\, (t_1, \ldots, t_n) \in {D_{\mathcal{H}}}^n \mid \nu(P(t_1, \ldots, t_n)) = \mathtt{tt} \,\}$
  für Prädikatensymbole der Stelligkeit n.

Offenbar gelten aufgrund dieser Konstruktion von $\mathcal{H}$ atomare geschlossenen Formeln $P(t_1, \ldots, t_n)$ der Sprache $\mathcal{L}'$ in $\mathcal{H}$ genau dann, wenn $\nu(P(t_1, \ldots, t_n)) = \mathtt{tt}$. Durch Induktion über den Aufbau geschlossener quantorenfreier Formeln A der Sprache $\mathcal{L}'$ zeigt man leicht, daß $\models_{\mathcal{H}} A$ genau dann, wenn $\nu(A) = \mathtt{tt}$. Aufgrund des Substitutionslemmas 3.5 (und der Definition von $D_{\mathcal{H}}$) folgt nun, daß für alle quantorenfreien Formeln A der Sprache $\mathcal{L}$ gilt, daß $\models_{\mathcal{H}} A$ genau dann, wenn ν alle Grundinstanzen von A wahr macht. Somit folgt, da ν nach Voraussetzung alle Grundinstanzen von A wahr macht, daß $\mathcal{H}$ ein Modell für A ist. $\square$

Modelle $\mathcal{H}$ wie im Beweis des Satzes von Herbrand heißen auch *Herbrand–Modelle* und spielen für die Grundlegung der Logikprogrammierung eine wichtige Rolle.

Der Satz von Herbrand erlaubt es also, die Allgemeingültigkeit geschlossener prädikatenlogischer Formeln auf die Unerfüllbarkeit unendlicher Mengen aussagenlogischer Formeln zu reduzieren. In gewisser Weise leistete dies bereits das Hauptlemma für Henkinerweiterungen.[15] Jedoch vermeidet die auf dem Satz von Herbrand beruhende Reduktion die technisch etwas lästigen Henkinkonstanten und ist deshalb für die Zwecke des Automatischen Beweisens vorzuziehen.
Bevor wir das Resolutionsverfahren für die Prädikatenlogik formulieren können, bedarf es noch folgender Betrachtung.

[15] In gewisser Hinsicht übernehmen die Skolemfunktionen die Rolle der Henkinkonstanten.

Lemma 8.5 *Für jede quantorenfreie Formel A der Sprache $\mathcal{L}$ gibt es eine Formel B der Gestalt $C_1(\vec{x_1}) \wedge \ldots \wedge C_n(\vec{x_n})$, wobei die $C_i(\vec{x_i})$ Klauseln sind mit $\vec{x_i}$ und $\vec{x_j}$ disjunkt für $i \neq j$, sodaß für alle $\mathcal{L}$–Strukturen $\mathcal{M}$ gilt, daß $\models_{\mathcal{M}} A$ genau dann, wenn $\models_{\mathcal{M}} B$.*

Beweis: Sei A eine quantorenfreie Formel und $C_1(\vec{x}) \wedge \ldots \wedge C_n(\vec{x})$ ihre konjunktive Normalform. Offenbar gilt $C_1(\vec{x}) \wedge \ldots \wedge C_n(\vec{x})$ in einem Modell $\mathcal{M}$ genau dann, wenn $\forall \vec{x}.\,(C_1(\vec{x}) \wedge \ldots \wedge C_n(\vec{x}))$ in $\mathcal{M}$ gilt. Letztere Formel ist beweisbar äquivalent zu der Formel $\forall \vec{x}.C_1(\vec{x}) \wedge \ldots \wedge \forall \vec{x}.C_n(\vec{x})$ und somit auch beweisbar äquivalent zu der Formel $\forall \vec{x_1}.C_1(\vec{x_1}) \wedge \ldots \wedge \forall \vec{x_n}.C_n(\vec{x_n})$, wobei die $\vec{x_i}$ paarweise disjunkte Listen von Variablen sind. Diese Formel ist wiederum beweisbar äquivalent zu $\forall \vec{x_1}, \ldots, \vec{x_n}.\,(C_1(\vec{x_1}) \wedge \ldots \wedge C_n(\vec{x_n}))$, welch letztere Formel in einem Modell $\mathcal{M}$ genau dann gilt, wenn $C_1(\vec{x_1}) \wedge \ldots \wedge C_n(\vec{x_n})$ in $\mathcal{M}$ gilt. $\square$

Aus den bisherigen Betrachtungen in diesem Abschnitt ergibt sich, daß die Allgemeingültigkeit einer geschlossenen prädikatenlogischen Formel äquivalent ist zur Unerfüllbarkeit einer aus dieser Formel effektiv konstruierten Menge von Klauseln, für die man ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen darf, daß verschiedene Klauseln keine Variablen gemeinsam haben. Aufgrund des Satzes 8.4 von Herbrand ist die Unerfüllbarkeit dieser Klauselmenge äquivalent zur rein propositionalen Unerfüllbarkeit der Menge der Substitutionsinstanzen dieser Klauseln. Dies gibt Anlaß zu folgendem im nächsten Satz beschriebenen Resolutionsverfahren für die Prädikatenlogik.

Theorem 8.6 (Resolutionsverfahren für die Prädikatenlogik)
Für eine geschlossene Formel A terminiert folgender Algorithmus genau dann, wenn A allgemeingültig ist.

(1) *Bringe $\neg A$ in Pränex–Normalform A'.*

(2) *Berechne die Skolemform A'' von A'.*

(3) *Berechne eine Menge $\{C_1, \ldots, C_k\}$ von Klauseln, sodaß $C_1 \wedge \ldots \wedge C_k$ zu A'' äquivalent ist.*

(4) *Versuche, aus $C_1, \ldots, C_k$ durch iterierte Anwendung folgender Resolutionsregel die leere Klausel herzuleiten: sind $\{A_1, \ldots, A_n\}$ und $\{B_1, \ldots, B_m\}$ Klauseln und σ und τ Substitutionen mit $\neg A_1[\sigma] \equiv B_1[\tau]$, so leitet man daraus eine neue Klausel her gemäß der* **Resolutionsregel**

$$\frac{\{A_1, \ldots, A_n\} \quad \{B_1, \ldots, B_m\} \quad \neg A_1[\sigma] \equiv B_1[\tau]}{(\{A_1[\sigma], \ldots, A_n[\sigma]\} \backslash \{A_1[\sigma]\}) \cup (\{B_1[\tau], \ldots, B_m[\tau]\} \backslash \{B_1[\tau]\})} \text{(Res)}$$

Beweis: Wir wissen aus vorhergehenden Betrachtungen, daß die Allgemeingültigkeit von A äquivalent ist zur rein propositionalen Konsistenz der Menge der

Substitutionsinstanzen der Klauseln $C_1, \ldots, C_n$. Aus Abschnitt I.9 wissen wir, daß die Unerfüllbarkeit einer Menge aussagenlogischer Formeln dadurch festgestellt werden kann, daß man die leere Klausel mithilfe der Resolutionsregel für die Aussagenlogik herleitet. Die im Satz formulierte Resolutionsregel für die Prädikatenlogik kombiniert einfach das Bilden von Substitutionsinstanzen mit der aussagenlogischen Resolutionsregel. Daß dabei die Substitutionen σ_1 und σ_2 derselben Variablen verschiedene Terme zuordnen dürfen, wird durch Satz 8.5 gerechtfertigt. $\square$

In der Theorie und Praxis des Automatischen Beweisens wird natürlich das eben beschriebene Verfahren in verschiedentlicher Hinsicht optimiert. Eine sehr naheliegende Optimierung ist, daß man in (Res) die Substitutionen σ_1 und σ_2 minimal, d.h. möglichst allgemein, wählt, um so unnötige Sackgassen zu vermeiden.
Nun aber illustrieren wir das Resolutionsverfahren für die Prädikatenlogik anhand der folgenden

Beispiele.

(1) Wir beweisen den Satz

$$A \equiv (\exists x.\forall y.R(x,y)) \to \forall y.\exists x.R(x,y) \ .$$

Eine mögliche Pränex–Normalform von $\neg A$ ist

$$A_1 \equiv \exists x.\exists v.\forall y.\forall u.\, R(x,y) \land \neg R(u,v)$$

woraus man durch Skolemisieren die Formel

$$A_2 \equiv R(c,y) \land \neg R(u,d)$$

erhält und somit die Klauselmenge $\{C_1, C_2\}$ mit $C_1 \equiv \{R(c,y)\}$ und $C_2 \equiv \{\neg R(u,d)\}$. Indem man d für y und c für u einsetzt, kann man mithilfe von (Res) die leere Klausel herleiten.

(2) Wir beweisen den Satz

$$A \equiv \exists x.(P(x) \to \forall y.P(y))$$

d.h. die sogenannte "Deppenformel". Eine Pränex–Normalform von $\neg A$ ist

$$A_1 \equiv \forall x.\exists y.\, (P(x) \land \neg P(y))$$

woraus man durch Skolemisierung die Formel

$$A_2 \equiv P(x) \land \neg P(f(x))$$

erhält, welche bereits in konjunktiver Normalform ist. Aus $C_1 = \{P(x)\}$ und $C_2 = \{\neg P(f(x))\}$ erhält man durch Resolution die leere Klausel, indem man auf C_1 die Substitution $\sigma_1(x) = f(x)$ anwendet und auf C_2 die identische Substitution.

II.9 Unentscheidbarkeit der Prädikatenlogik

Der Vollständigkeitssatz für die klassische Prädikatenlogik besagt, daß allgemeingültige Formeln auch immer im klassischen Kalkül des Natürlichen Schließens hergeleitet werden können. Aufgrund des Korrektheitssatzes sind natürlich die herleitbaren Formeln genau die allgemeingültigen. Man könnte also (im Prinzip) ein Computerprogramm schreiben, das der Reihe nach alle allgemeingültigen prädikatenlogischen Formeln aufzählt, da man ja der Reihe nach alle Herleitungen im klassischen Kalkül des Natürlichen Schließen durch ein Computerprogramm aufzählen kann und jede allgemeingültige Formel dann irgendwann einmal in der Aufzählung vorkommen muß.

Es erhebt sich aber die Frage, ob man auch algorithmisch feststellen kann, ob eine geschlossenene Formel A nicht allgemeingültig ist. Dies scheint nicht auf eine einfache Art möglich zu sein, da – wie wir im letzten Abschnitt gesehen haben – eine Formel A genau dann nicht allgemeingültig ist, wenn eine unendliche Menge von Klauseln rein aussagenlogisch unerfüllbar ist. Diese letztere Bedingung ist deshalb algorithmisch schwer in den Griff zu bekommen, da sie eine universelle Quantifikation über alle Wahrheitswertbelegungen der Menge aller atomarer variablenfreier Formeln beinhaltet (und davon gibt es soviele, wie es Teilmengen von $\mathbb{N}$ gibt, wenn es abzählbar unendlich viele atomare variablenfreie Formeln gibt).

Tatsächlich ist es auch der Fall, wie wir gleich zeigen werden, daß *die Menge der allgemeingültigen prädikatenlogischen Formeln* **nicht algorithmisch entscheidbar** *ist.* Wir zeigen, daß sich das Problem der Allgemeingültigkeit prädikatenlogischer Formeln auf das *Halteproblem* (für, sagen wir, Turingmaschinen) reduzieren läßt. D.h. wir zeigen, daß man aus einem hypothetischen Entscheidungsverfahren für die Allgemeingültigkeit prädikatenlogischer Formeln ein Entscheidungsverfahren für das Halteproblem konstruieren kann. Für einen Beweis der Unentscheibarkeit des Halteproblems verweisen wir auf die Vorlesung Informatik IV, in der auch folgender wichtige Tatbestand bewiesen wird.

Theorem 9.1 (Kleene'sches T–Prädikat)
Es gibt ein 3–stelliges primitiv rekursives Prädikat T auf $\mathbb{N}$, sodaß für alle $e, n \in \mathbb{N}$ die e–te Turingmaschine angewendet auf die Eingabe n genau dann terminiert, wenn $\exists k.T(e, n, k)$.

Beweis: Für Details sei wie schon gesagt auf die Vorlesung Informatik IV verwiesen. Jedoch einige Worte zur Beweisidee. Die Aussage $T(e, n, k)$ soll man lesen als "k ist Gödelnummer einer terminierenden Berechnung der Turingmaschine mit Gödelnummer e angewendet auf Eingabe n". Man kann sich leicht vorstellen, wie man ein Programm schreibt, welches das Prädikat T entscheidet und keine **while**–Schleifen verwendet, sondern bloß **for**–Schleifen und somit primitiv rekursiv ist. Daß **for**–Schleifen ausreichen ist deshalb einsichtig, weil alle als Teilprobleme auftretenden Suchprobleme beschränkt sind, was sich aus der Natur der gewählten Gödelisierungen unmittelbar ergibt. □

Der folgende Beweis der Unentscheidbarkeit der Allgemeingültigkeit prädikatenlogischer Formeln beruht auf dem Tatbestand, daß $\exists k.T(e,n,k)$ genau dann (in $\mathbb{N}$) gilt, wenn $\exists k.T(\underline{e},\underline{n},k)$ in einer endlich axiomatisierbaren Theorie herleitbar ist.

Theorem 9.2 (Unentscheidbarkeit der Prädikatenlogik)
Es gibt keinen Algorithmus, der die Allgemeingültigkeit prädikatenlogischer Formeln entscheidet.

Beweis: Wir ordnen jedem Paar $(e,n) \in \mathbb{N}^2$ auf effektive Weise eine Formel $A_{e,n}$ zu, für die gilt, daß $A_{e,n}$ genau dann herleitbar ist, wenn $\exists k.T(e,n,k)$ wahr ist. Wir definieren $A_{e,n} \equiv B \to \exists k.T(\underline{e},\underline{n},k)$, wobei B die Konjunktion der definierenden Gleichungen für T und der benötigten Gleichheitsaxiome[16] ist. Es ist $B \to \exists k.T(\underline{e},\underline{n},k)$ genau dann herleitbar, wenn $\exists k.T(e,n,k)$ in $\mathbb{N}$ wahr ist.
Wenn es denn nun einen Entscheidungsalgorithmus für die Allgemeingültigkeit bzw. Herleitbarkeit geschlossener prädikatenlogischer Formeln gäbe, dann könnte man das Halteproblem folgendermaßen entscheiden: um die Termination der e–ten Turingmaschine für die Eingabe n zu entscheiden, entscheide die Herleitbarkeit der Formel $A_{e,n}$. □

Mit einer ähnlichen Betrachtung kann man zeigen, daß die Menge der wahren, d.h. im Standardmodell $\mathbb{N}$ gültigen Sätze der Arithmetik nicht rekursiv aufzählbar, geschweige denn entscheidbar ist.

Theorem 9.3 *Sei $\mathcal{L}$ die Erweiterung der Sprache der Arithmetik um Konstanten für alle primitiv rekursiven Funktionen und Prädikate. Dann ist die Menge der im Standardmodell $\mathbb{N}$ gültigen Sätze von $\mathcal{L}$ nicht rekursiv aufzählbar.*

Beweis: Wenn die Menge der wahren, d.h. im Standardmodell $\mathbb{N}$ gültigen Sätze von $\mathcal{L}$ rekursiv aufzählbar wäre, so wäre auch die Menge der wahren Sätze der Gestalt $\forall k.\neg T(\underline{e},\underline{n},k)$ rekursiv aufzählbar. Dann wäre aber auch das Komplement des Halteproblems rekursiv aufzählbar und somit das Halteproblem entscheidbar (da ja das Halteproblem selbst rekursiv aufzählbar ist). □

Da für jede *formale axiomatische Theorie*, d.h. für jede rekursiv aufzählbare Menge $\mathcal{T}$ von Sätzen einer Sprache 1.Stufe, die Menge der aus $\mathcal{T}$ folgenden, d.h.

[16] Man muß allerdings aufpassen, daß man nur endlich viele Gleichheitsaxiome postuliert, da B ja nur eine endliche Konjunktion geschlossener Formeln sein kann. Deshalb ist es opportun, die Gleichheit nicht wie in Definition 1.10 durch die Axiomenschemata ($Eq1$) und ($Eq2$) zu axiomatisieren, sondern wie in der Allgemeinen Algebra durch die Axiome der Reflexivität, Transitivität und Symmetrie und Kongruenzaxiome für T und alle seine Hilfsfunktionen und Hilfsprädikate.

herleitbaren, Sätze auch rekursiv aufzählbar ist, kann diese Theorie $\mathcal{T}$ nicht alle wahren Sätze der Gestalt $\forall k.\neg T(\underline{e}, \underline{n}, k)$ beweisen, weil ja sonst das Halteproblem entscheidbar wäre! Selbstverständlich gilt das auch für die axiomatische Mengenlehre, aus der sich die gesamte bisherige Mathematik formal herleiten läßt. Also stellt die Informatik in Form des Halteproblems Fragen, die *in ihrer Gesamtheit nie von einem geschlossenen axiomatischen System beantwortet werden können*!

Inhaltsverzeichnis