Einführung in die mathematische Modellierung

Übung vom 19.05.2004 / Daniel Germanus <daniel@strukturpalais.de>

Problem

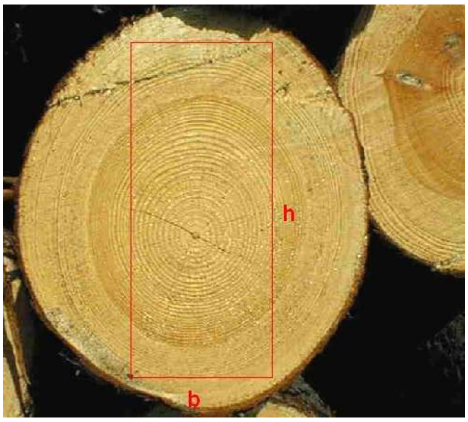
Die Instandhaltung von Brücken in einer alpinen Umgebung mit ausschließlich lokal vorhandenen Rohstoffen stellt eine Herausforderung an die Materialwahl und -verarbeitung dar. In dieser Übung soll ein Modell erarbeitet werden, das die Bemaßungsgrößen beim Baumzuschnitt optimieren soll. Zunächst sind geeignete Kriterien zu finden. Diese könnten sein:

Kriterien

1. Stabilität maximieren
2. Verschnitt minimieren
3. Querschnitt minimieren

Diskussion

1. Hohe Stabilität erreicht man, indem mehrere gleich große Balken vertikal gestapelt werden. Durch eine Leimschicht zwischen den einzelnen Balken wird die Tragfähigkeit zusätzlich erhöht (vgl. Leimbinder). Als eine erste Angabe für die Stabilität wird die Formel $K=cbh^2$ betrachtet: b und h geben Breite und Höhe des Holzstücks an, c ist eine Materialkonstante. Die Höhe geht in diesem Fall quadratisch ein, da mit der Höhe nicht nur die Zahl der Holzfasern, sondern auch der mittlere Hebelarm zunimmt, mit dem sich die Fasern einer Durchbiegung des Balkens widersetzen. Die Stabilität K zu maximieren bedeutet -K zu minimieren: $f(b,h):=-K=-chb^2$.



2. Der Verschnitt hängt von der Wahl der Höhe und Breite des aus dem Baum zu extrahierenden Holzstücks ab. Damit ein eindeutiges und Realwelt-taugliches Ergebnis gefunden wird, ist es notwendig Nebenbedingungen zu finden, die oftmals a priori nicht geben sind:

   $\sqrt{(b^2+h^2)}\leq 2r$ Damit das Holzstück nicht größer würde, als es der Baum mit Radius r tatsächlich zuließe. Die Umformung zu $h_1:=b^2+h^2-4r^2\leq 0$ führt zu einer Nebenbedingung in Standardform und schließlich zur Hamiltonfunktion

   $$H(b,h,\mu)=f+\mu h_1=-cbh^2+\mu(b^2+h^2-4r^2)$$

   falls h_1 aktiv ist.

   Die stationären Punkte von H erhält man durch Nullsetzen der partiellen Ableitungen von H nach den Variablen b, h und μ. Dies liefert die notwendigen Bedingungen an die optimale Lösung:

   $$\frac{\partial H}{\partial b}=\frac{\partial H}{\partial h}=\frac{\partial H}{\partial \mu}=0 \quad .$$

$$H_b = -ch^2 + 2\mu b = 0$$
$$H_h = -2cbh + 2\mu h = 0$$
$$H_\mu = b^2 + h^2 - 4r^2 = 0$$

Eine Lösung des Systems wäre h = 0, μ = 0, b = 2r, diese liefert jedoch minimale Stabilität, da es sich nur um eine notwendige und keine hinreichende Bedingung handelt.

$$h \neq 0 \overset{H_h=0}{\Rightarrow} \mu = cb \overset{H_b=0}{\Rightarrow} h = \sqrt{2}\,b \overset{H_\mu=0}{\Rightarrow} b = \frac{2}{\sqrt{3}}r$$
$$h = \sqrt{2}\,b = 2\sqrt{\frac{2}{3}}r \quad b = \frac{2}{\sqrt{3}}r$$
$$\mu > 0 \Rightarrow Annahmen\ h_1\ aktiv\ berechtigt.$$

Eine andere Variante, die das Kriterium des geringsten Verschnitts aufgreift, sieht folgendermaßen aus:

$$cbh^2 = K\ gegeben \qquad b, h \geq 0$$
$$bh \rightarrow min.$$
$$H = bh + \mu(-cbh^2)$$

$$H_b = h - \mu ch^2 = h(1 - \mu ch) \overset{!}{=} 0$$
$$H_h = b - 2\mu cbh = b(1 - 2\mu ch) \overset{!}{=} 0$$
$$H_\mu = cbh^2 = K$$

Dieses Modell berücksichtigt allerdings nur vertikale Durchbiegung ohne Verwindung.

Fazit

Bei der Lösung der entstehenden Gleichungssysteme partieller Ableitungen von H ist darauf zu achten, keine untauglichen Lösungen in Erwägung zu ziehen. Es gibt keine Garantie für die Existenz und Eindeutigkeit eines Optimums.