Protokoll der CE – Übung vom 30.06.04

Übungsleiter Herr Prof. Dr. Kiehl

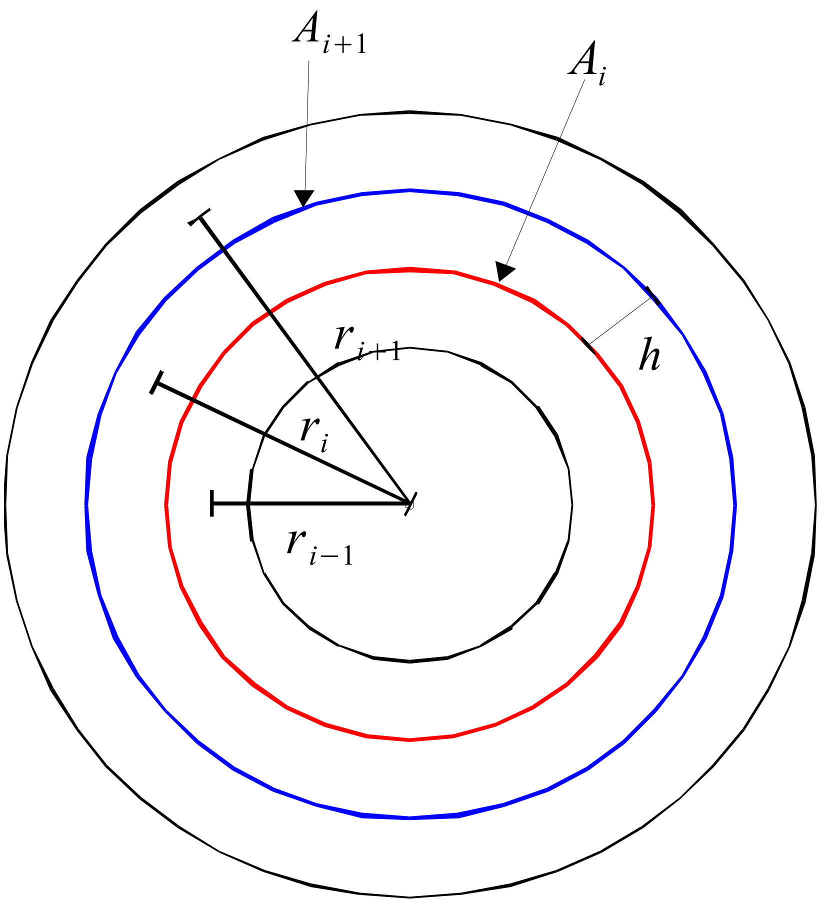
Aufgabenstellung:

Beim Erhitzen von Lebensmitteldosen zur Lebensmittelkonservierung stellt sich die Frage:
Wie lange muß eine Dose erhitzt werden, um enthaltene Keime abzutöten ohne aber sämtliche Vitamine zu zerstören? Also: Nach welcher Zeit und aufgebrachter Erhitzungsintensität hat auch die Mitte der Dose ein ausreichende Temperatur ohne den Rand zu überhitzen.

Getroffene Annahmen:
1. keine Strömungen in der Dose aufgrund des Wärmeeinflusses
2. keine Wärmestrahlung nur Wärmeleitung
3. die höhere Wärmeleitbarkeit des Dosenblechs, daß zu einer schnelleren Erhitzung nach Innen am Boden und am Deckel der Dose führt wurde ebenfalls vernachlässigt
4. homogenes Material innerhalb der Dose

Folgende Parameter sind für den Wärmeaustausch im Inneren der Dose wichtig:
1. die Temperaturdifferenz
2. die Wärmeleitfähigkeit L des Materials
3. die spezifische Wärmekapazität C des Materials
4. das Volumen V, das erwärmt wird
5. die Kontaktfläche A, über die der Wärmeaustausch vonstatten geht

Da die Erwärmung radial von außen nach innen verläuft wurde eine Aufteilung des Dosen-querschnitts in Kreisringe gewählt. Nach dem folgenden Schema:



Wobei A_{i+1} die Kontaktfläche zwischen dem i+1 ten und dem i ten Ring ist und A_i die Kontaktfläche zwischen dem i ten und dem i-1 ten. $T_{r_{i+1}}$ Ist die Temperatur im Kreisring mit dem Mittelradius r_{i+1} , $T_{r_{i-1}}$ die Temperatur in dem Kreisring mit dem Mittelradius r_{i-1} und T_{r_i} ist die Temperatur im betrachteten Kreisring mit dem Mittelradius r_i .
Sämtliche Kreisringe haben den Abstand h voneinander. Der aktuell betrachtete Kreisring mit dem Mittelradius r_i hat das Volumen V_i .

$$A_{i+1}=2\cdot(r_i+\frac{h}{2})\cdot\pi\cdot H$$
$$A_i=2\cdot(r_i-\frac{h}{2})\cdot\pi\cdot H$$
$$V_i=2\cdot r_i\cdot h\cdot\pi\cdot H$$

Wobei H die Höhe der Dose ist.

Bei der aufzustellenden Gleichung muß beachtet werden, daß der Temperaturunterschied im Kreisring i in einer Zeitspanne Δt proportional zum Temperaturunterschied der angrenzenden Kreisringe ist. Weiterhin ist er proportional zur Kontaktfläche zwischen zwei Kreisringen, zur Wärmeleitfähigkeit L und zur Zeitspanne Δt .
Als Quotienten gehen die Wärmekapazität C und das Volumen V ein.
Dies führt auf folgende Gleichung:

$$T_{r_i}(t+\Delta t)=T_{r_i}(t)+\frac{(T_{r_{i+1}}-T_{r_i})\cdot L\cdot A_{i+1}\cdot\Delta t}{C\cdot V_i}+\frac{(T_{r_{i-1}}-T_{r_i})\cdot L\cdot A_i\cdot\Delta t}{C\cdot V_i}$$

Wobei hier einmal der Wärmeaustausch zwischen den Kreisringen i und i+1 und zwischen den Kreisringen i und i-1 aufgeschrieben wurde.

Nach Umformen erhalten man auf der linken Seiten den Differenzenquotienten von T_{r_i} nach der Zeit:

$$\frac{T_{r_i}(t+\Delta t)-T_{r_i}(t)}{\Delta t}=\frac{(T_{r_{i+1}}-T_{r_i})\cdot L\cdot A_{i+1}}{C\cdot V_i}+\frac{(T_{r_{i-1}}-T_{r_i})\cdot L\cdot A_i}{C\cdot V_i}$$

Nun wird A_{i+1} , A_i und V_i eingesetzt, $T_{r_{i+1}}$ durch $T_{r_{i+h}}$ und $T_{r_{i-1}}$ durch $T_{r_{i-h}}$ ersetzt. Was auf die nächste Gleichung führt:

$$\frac{T_{r_i}(t+\Delta t)-T_{r_i}(t)}{\Delta t}=\frac{(T_{r_{i+h}}-T_{r_i})\cdot L\cdot 2\cdot(r_i+\frac{h}{2})\cdot\pi\cdot H}{C\cdot 2\cdot r_i\cdot h\cdot\pi\cdot H}+\frac{(T_{r_{i-h}}-T_{r_i})\cdot L\cdot 2\cdot(r_i-\frac{h}{2})\cdot\pi\cdot H}{C\cdot 2\cdot r_i\cdot h\cdot\pi\cdot H}$$

Hier kürzen sich π , H und 2 heraus. Weiterhin führt ausklammern von $\frac{L}{C\cdot r_i\cdot h}$ auf:

$$\frac{T_{r_i}(t+\Delta t)-T_{r_i}(t)}{\Delta t}=\frac{L}{C\cdot r_i\cdot h}\cdot[(T_{r_{i+h}}-T_{r_i})(r_i+\frac{h}{2})+(T_{r_{i-h}}-T_{r_i})(r_i-\frac{h}{2})]$$

Ausmultiplizieren der Klammern führt (fast) auf das gesuchte Ergebnis:

$$\frac{T_{r_i}(t+\Delta t)-T_{r_i}(t)}{\Delta t}=\frac{L}{C}\frac{T_{r_{i+h}}-2\cdot T_{r_i}+T_{r_{i-h}}}{h}+\frac{L}{C\cdot r_i}\frac{T_{r_{i+h}}-T_{r_{i-h}}}{2}$$

Hier zeigt sich, daß die Wärmeleitfähigkeit L mit $\frac{L_0}{h}$ angesetzt werden muß, da ja nicht die gesamte Energie am Rand zu Verfügung steht.

Dies führt auf die nächste Gleichung:

$$\frac{T_{r_i}(t+\Delta t)-T_{r_i}(t)}{\Delta t}=\frac{L_0}{C}\frac{T_{r_{i+h}}-2\cdot T_{r_i}+T_{r_{i-h}}}{h^2}+\frac{L_0}{C\cdot r_i}\frac{T_{r_{i+h}}-T_{r_{i-h}}}{2\cdot h}$$

Wobei auf der linken Seite nun auch zwei Differenzenquotienten stehen. Wenn $h\to 0$ geht natürlich $r_i\to r$. Mit $\Delta t\to 0$ führt das letztendlich auf die partielle Differentialgleichung:

$$T_t(r,t)=\frac{L_0}{C}\cdot T_{rr}+\frac{L_0}{C\cdot r}\cdot T_r$$

Name: Jörg Schumacher

Matrikelnr: 965844

Studiengang: CE