Stochastische Prozesse
14. Übungsblatt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Volker Betz
Stefan Walter

WiSe 2012/2013
15.02.2013

Vortragsaufgaben

Aufgabe H25
In dieser Aufgabe sollen die Bemerkungen aus der Vorlesung zu Satz 3.45 (Tanaka's Formel) ausgearbeitet werden. Setze hierzu oBdA $a = 0$ und beispielsweise

$$g(x) = \begin{cases} \frac{1}{8}(-x^4 + 6x^2 + 3) & \text{falls } |x| \le 1, \\ |x| & \text{falls } |x| \ge 1, \end{cases}$$

so dass die C^2-Funktionen

$$f_n(x) = \frac{1}{n} g(nx)$$

eine approximierende Folge für $f(x) = |x|$ liefern.
Verwende nun Itō's Formel um Satz 3.45 zu beweisen.

Aufgabe H26
Sei $(X_t)_{t\ge 0}$ die Brownsche Bewegung und betrachte die SDGL

$$Y_t - y = \int_0^t b(s)ds + \int_0^t \sigma(s)dX_s$$

mit deterministischen Koeffizienten $b, \sigma : [0,\infty) \to \mathbb{R}$. Wie lautet die Verteilung von Y_t, wie der Erwartungswert, die Varianz bzw. die Kovarianz von Y_s, Y_t?

Gruppenübung

Aufgabe G55
Sei $(X_t)_{t\ge 0}$ die Brownsche Bewegung. Führe die Folgerung in der Vorlesung aus und zeige mithilfe von Lévy's Charakterisierung der Brownschen Bewegung, dass es sich bei

$$Y_t = \int_0^t \operatorname{sgn}(X_s)dX_s$$

tatsächlich um eine Brownsche Bewegung handelt.

Aufgabe G56
Sei $(X_t, \mathscr{F}_t)_{t\ge 0}$ eine Brownsche Bewegung und setze $\beta_t = e^{lX_t - l^2 \frac{t}{2}}$. Bekannt ist bereits, dass $(\beta_s)_{s\le T}$ ein Martingal bezüglich der Filtration $(\mathscr{F}_t)_{t\ge 0}$ ist. Überzeuge dich zunächst, dass auch $\mathscr{Q} := \beta_T \mathbf{P}$ ein W-Maß ist.
Betrachte nun den durch

$$W_t := X_t - lt$$

definierten Prozess bezüglich dem neuen Maß $\mathscr{Q}$ und zeige dass $(W_t, \mathscr{F}_t)_{t\le T}$ eine Brownsche Bewegung bezüglich $\mathscr{Q}$ ist.

Hinweis. Zeige für $\xi \in \mathbb{R}$ und $s \leq t \leq T$ dass

$$\mathbb{E}_{\mathcal{Q}}[e^{i\xi(W_t - W_s)} \mid \mathcal{F}_s] = e^{-\frac{1}{2}(t-s)\xi^2}.$$

Aufgabe G57

Sei $(X_t)_{t\geq 0}$ die Brownsche Bewegung. Finde jeweils eine SDGL die gelöst wird von

(a) $V_t = \sin(X_t)$,

(b) $\begin{pmatrix} Y_t \\ Z_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\cos(X_t) \\ b\sin(X_t) \end{pmatrix}, \quad a, b \neq 0.$

Aufgabe G58

Wir verallgemeinern in dieser Aufgabe Beispiel 3.42 aus der Vorlesung (Homogene lineare SDGL) durch die lineare SDGL

$$dY_t = (\alpha(t) + \beta(t)Y_t)dt + (\gamma(t) + \delta(t)Y_t)dX_t,$$

mit $(X_t)_{t\geq 0}$ als Brownscher Bewegung und deterministischen Koeffizienten $\alpha, \beta, \gamma, \delta : [0, \infty) \to \mathbb{R}$. Um zu einer Lösungsdarstellung für Y_t zu gelangen, gehe wie folgt vor.

Sei Y_t^0 ein stochastischer Prozess derart, dass $\frac{1}{Y_t^0}$ eine Lösung der homogenen linearen SDGL[1] für $Y_0^0 = 1$ ist. Zeige dass Y_t^0 gegeben ist durch

$$Y_t^0 = e^{-\int_0^t (\beta(s) - \frac{\delta^2(s)}{2})ds - \int_0^t \delta(s)dX_s}$$

und verifiziere

$$dY_t^0 = (-\beta(t) + \delta^2(t))Y_t^0 dt - \delta(t)Y_t^0 dX_t.$$

Setze nun $Z_t := Y_t^0 Y_t$ und verwende die Itō-Formel um zu zeigen dass

$$dZ_t = (\alpha(t) - \gamma(t)\delta(t))Y_t^0 dt + \gamma(t)Y_t^0 dX_t.$$

Zeige zuletzt, dass

$$Y_t = \frac{1}{Y_t^0}(Y_0 + \int_0^t (\alpha(s) - \gamma(s)\delta(s))Y_s^0 ds + \int_0^t \gamma(s)Y_s^0 dX_s).$$

[1] siehe ($\star$) aus Beispiel 3.42 in der Vorlesung