Stochastische Prozesse
7. Übungsblatt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Volker Betz
Stefan Walter

WiSe 2012/2013
07.12.2012

Vortragsaufgaben

Aufgabe H11
Sei $(X_t)_{t\geq 0}$ die Brownsche Bewegung und $\zeta := \sup\{z \leq 1 \mid X_z = 0\}$. Zeige dass die von Paul Lévy hergeleitete Gleichung

$$\mathbf{P}(\zeta \leq t) = \frac{2}{\pi} \arcsin(\sqrt{t})$$

für $t \in [0,1]$ erfüllt ist.

Aufgabe H12
Seien $(X_t^1)_{t\geq 0}$, $(X_t^2)_{t\geq 0}$ unabhängige Brownsche Bewegungen und $\tau = \inf\{z > 0 \mid X_z^2 = a\}$ für ein $a > 0$.
Weise nach, dass X_τ^1 die Dichte

$$\frac{a}{\pi(x^2 + a^2)}$$

besitzt.

Gruppenübung

Aufgabe G27
Aus der Vorlesung ist bereits das Reflexionsprinzip für die Brownsche Bewegung bekannt (Satz 2.63). Veranschauliche und beweise dieses nun für den Fall einer einfachen, symmetrischen Irrfahrt $(X_t)_{t\in\mathbb{N}}$ auf $\mathbb{Z}$, d.h. zeige für natürliche Zahlen j, k und r, sowie $\tau_0 := \min\{n \in \mathbb{N} \mid X_n = 0\}$ dass

$$\mathbf{P}(\tau_0 < r, X_r = j \mid X_0 = k) = \mathbf{P}(X_r = -j \mid X_0 = k) \quad \text{und}$$
$$\mathbf{P}(\tau_0 < r, X_r > 0 \mid X_0 = k) = \mathbf{P}(X_r < 0 \mid X_0 = k).$$

Aufgabe G28
Sei τ eine endliche Stoppzeit und $(X_t)_{t\geq 0}$ die Brownsche Bewegung. Zeige dass es sich auch bei dem Prozess

$$(Z_t)_{t\geq 0} = (X_{\tau+t} - X_\tau)_{t\geq 0}$$

um eine Brownsche Bewegung handelt und dass diese unabhängig von $\mathscr{F}_\tau$ ist.

Bemerkung. Diese Aussage wird für bestimmte Prozesse, darunter die Brownsche Bewegung, häufig als Definition der starken Markoveigenschaft des stochastischen Prozesses verwendet, da die Formulierung vergleichsweise simpler ist.

Aufgabe G29
Sei $(X_t)_{t\geq 0}$ die Brownsche Bewegung und $z > 1$. Berechne

$$\mathbf{P}(X_s = 0 \text{ für ein } 1 \leq s \leq z).$$

Aufgabe G30
Gegeben sei ein quadrat-integrierbares Martingal M_t. Zeige dass für $r < s < t$ gilt

$$\mathbb{E}[(M_t - M_s)^2 \mid \mathscr{F}_r] = \mathbb{E}[M_t^2 - M_s^2 \mid \mathscr{F}_r].$$