Stochastische Prozesse
3. Übungsblatt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Volker Betz
Stefan Walter

WiSe 2012/2013
09.11.2012

Vortragsaufgaben

Aufgabe H3
Sei X eine Gauß-verteilte Zufallsvariable mit Parametern $m = 0$ und σ^2.

(a) Weise nach, dass für $\sigma^2 = 1$ gilt:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{C + \frac{1}{C}} e^{-\frac{C^2}{2}} \leq \mathbf{P}(X \geq C) \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{C} e^{-\frac{C^2}{2}} \quad , \forall C > 0.$$

(b) Was ersetzt die Ungleichung in (a), falls σ^2 allgemein gewählt wird?

Aufgabe H4
Gegeben sei die Folge $(\xi_k)_{k\in\mathbb{N}}$, mit $\xi_k \sim \mathcal{N}(m_k, \sigma_k^2)$, die in Verteilung gegen eine Zufallsvariable ξ konvergiert.
Zeige dass dann $\xi \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2)$, für gewisse m und σ^2 mit

$$m_k \to m \quad \text{und} \quad \sigma_k^2 \to \sigma^2.$$

Gruppenübung

Aufgabe G10
Definiere wie in der Vorlesung

$$g_{m,\sigma^2}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}.$$

Zeige

(a) $\int_{\mathbb{R}} g_{m,\sigma^2}(x)\, dx = 1,$

(b) $\int_{\mathbb{R}} x\, g_{m,\sigma^2}(x)\, dx = m$ und

(c) $\int_{\mathbb{R}} (x-m)^2\, g_{m,\sigma^2}(x)\, dx = \sigma^2.$

Aufgabe G11
Rechne nach, dass die endlich-dimensionalen Verteilungen des reellwertigen Prozesses $(X_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ mit stationären und unabhängigen Inkrementen, sowie den Eigenschaften $X_0 = 0$, $X(t) \sim \mathcal{N}(0, t)\ \forall t \geq 0$, konsistent sind.

Aufgabe G12
Seien $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n$ unabhängige standardnormalverteilte Zufallsvariablen, $\xi = (\xi_1, ..., \xi_n)$ und $\mathcal{O}$ eine $n \times n$ Orthogonalmatrix.
Beweise dass dann $\mathcal{O}\xi$ die gleiche Verteilung besitzt wie ξ.