Stochastische Prozesse
8. Übungsblatt

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Volker Betz
Stefan Walter

WiSe 2012/2013
14.12.2012

Vortragsaufgaben

Aufgabe H13
Es seien gegeben $(X_n)_{n\geq 1}$ eine Folge unabhängig, identisch verteilter Zufallsvariablen mit $\mathbf{P}(X_i = +1) = p$, $\mathbf{P}(X_i = -1) = 1 - p =: q$ und $S_n = X_1 + \ldots + X_n$, $S_0 = 0$, die zugehörige Irrfahrt auf $\mathbb{Z}$ mit Parameter p und Start in 0. Für $a, b \in \mathbb{Z}$ mit $a < 0 < b$ sei $T = \min\{n \geq 1 \mid S_n = a \text{ oder } S_n = b\}$. Zeige das folgende bekannte Resultat mithilfe des Stoppsatzes:

(a) Ist $p = \frac{1}{2}$ so gilt $\mathbf{P}(S_T = a) = \frac{b}{b+|a|}$.

(b) Ist $p \neq \frac{1}{2}$ so gilt

$$\mathbf{P}(S_T = a) = \frac{1 - (\frac{p}{q})^b}{1 - (\frac{p}{q})^{b+|a|}}.$$

Hinweis. Zeige in der b) zunächst, dass es sich bei $(\frac{q}{p})^{S_n}$ um ein Martingal handelt!

Aufgabe H14
Zu Beginn der Vorlesung wurde der Poisson-Prozess $(N_t)_{t\geq 0}$ mit Intensität λ eingeführt.
Es sei nun $\mathscr{A}_t = \sigma\{N_s \mid s \in [0, t]\}$.
Zeige dass dann folgende Familien von Zufallsvariablen $(\mathscr{A}_t)$-Martingale sind:

(a) $(N_t - \lambda t)_{t\geq 0}$,

(b) $((N_t - \lambda t)^2 - \lambda t)_{t\geq 0}$.

Gruppenübung

Aufgabe G31
Betrachte dieselbe Situation wie in Aufgabe H13. Zeige dass für $p \neq \frac{1}{2}$ gilt:

$$\mathbb{E}[T] = \frac{b}{p-q} - \frac{b+|a|}{p-q} \cdot \frac{1 - (\frac{p}{q})^b}{1 - (\frac{p}{q})^{b+|a|}}.$$

Hinweis. Wende den Stoppsatz auf das Martingal $S_n - n(p - q)$ an!

Aufgabe G32
Für ein Supermartingal $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gelte $X_n \geq 0$ fast sicher für alle $n \in \mathbb{N}$. Beweise dass für fast alle $\omega \in \Omega$ gilt:

$$X_k(\omega) = 0 \quad \text{für ein } k \in \mathbb{N} \quad \Longrightarrow \quad X_n(\omega) = 0 \quad \text{für alle } n \geq k.$$

Aufgabe G33
Für ein Martingal $(Z_n)_{n\geq 1}$ definiere $X_i = Z_i - Z_{i-1}$ mit $Z_0 \equiv 0$. Zeige

$$\mathrm{Var}(Z_n) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Var}(X_i).$$

Aufgabe G34

Es sei $(X_n)_{n\geq 1} \subset \mathscr{L}^2(\mathbf{P})$ eine Folge von Zufallsvariablen, so dass $S_n = X_1 + ... + X_n$, $n \geq 1$, ein $(\mathscr{A}_n)$-Martingal ist.

(a) Zeige, dass die Zufallsvariablen $(X_n)_{n\geq 1}$ paarweise unkorreliert sind, d.h. es gilt

$$\mathbb{E}[X_n X_m] = 0 \quad \text{für } n \neq m.$$

(b) Es sei $\sup_{n\geq 1} \mathbb{E}[X_n^2] < \infty$. Folgere mithilfe von a), dass für $(S_n)_{n\geq 1}$ das schwache Gesetz der großen Zahlen gilt, d.h.

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(|\frac{S_n}{n}| \geq \epsilon) = 0$$

für alle $\epsilon > 0$.