Stochastische Prozesse
6. Übungsblatt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Volker Betz
Stefan Walter

WiSe 2012/2013
30.11.2012

Vortragsaufgaben

Aufgabe H9
Man rufe sich zunächst Aufgabe G2 in Erinnerung. Zeige dass es sich auch bei den folgenden Zufallsvariablen τ um Stoppzeiten handelt.

(a) $(\tau_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sei eine Folge von Stoppzeiten bezüglich der rechsstetigen Filtration $\mathscr{F}_t$ mit $\tau_n \underset{n\to\infty}{\nearrow} \tau$,

(b) $(\tau_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sei eine Folge von Stoppzeiten bezüglich der rechsstetigen Filtration $\mathscr{F}_t$ mit $\tau_n \underset{n\to\infty}{\searrow} \tau$,

(c) $(\tau_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sei eine Folge von Stoppzeiten bezüglich der rechsstetigen Filtration $\mathscr{F}_t$ und $\tau = \limsup\limits_{n\to\infty} \tau_n$,

(d) $(\tau_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sei eine Folge von Stoppzeiten bezüglich der rechsstetigen Filtration $\mathscr{F}_t$ und $\tau = \liminf\limits_{n\to\infty} \tau_n$,

(e) $\tau = \lim\limits_{n\to\infty} \tau_n$, falls der Grenzwert existiert.

Aufgabe H10
Sei $(X_t)_{t\geq 0}$ die Brownsche Bewegung und τ eine Stoppzeit mit $\mathbb{E}[\tau] < \infty$. Definiere eine steigende Folge von Stoppzeiten durch $\tau_1 = \tau$ und $\tau_n = \tau(\, (\theta_{\tau_{n-1}} X_t - X_{\tau_{n-1}})_{t\geq 0}\,) + \tau_{n-1}$, wobei θ die aus der Vorlesung bekannte Shift-Funktion ist.

(a) Zeige dass fast sicher gilt
$$\lim_{n\to\infty} \frac{X_{\tau_n}}{n} = 0.$$

(b) Zeige dass X_τ integrierbar ist.

(c) Zeige dass fast sicher gilt
$$\lim_{n\to\infty} \frac{X_{\tau_n}}{n} = \mathbb{E}[X_\tau].$$

Gruppenübung

Aufgabe G22
Zeige dass für die Brownsche Bewegung in den folgenden beiden Fällen gilt $\mathbf{P}(\tau = 0) = 1$:

(a) $\tau = \inf\{t > 0 \mid X_t > 0\}$,

(b) $\tau = \inf\{t > 0 \mid X_t = 0\}$.

Aufgabe G23
Sei $(X_t)_{t\geq 0}$ die Brownsche Bewegung und $T_a = \inf\{t \geq 0 \mid X_t \geq a\}$ für $a > 0$.

(a) Zeige dass gilt $\mathbf{P}(T_a \leq t) = 2\mathbf{P}(X_t \geq a)$.

(b) Sei F die Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung. Zeige dass $\mathbf{P}(T_a \leq t) = 2 - 2F(\frac{a}{\sqrt{t}})$ und gib die Dichtefunktion von T_a an.

(c) Nutze Aufgabenteil b) um zu wiederholen, dass $\mathbf{P}(T_a < \infty) = 1$ und dass $\mathbb{E}[T_a] = \infty$.

Aufgabe G24
Weise nach, dass jede $\mathscr{F}_t$-Stoppzeit fallender Grenzwert von diskreten Stoppzeiten ist.

Aufgabe G25
Seien τ, τ_1, τ_2 Stoppzeiten bezüglich der rechtsstetigen Filtration $\mathscr{F}_t$. Zeige

(a) τ ist $\mathscr{F}_\tau$-messbar,

(b) $\tau_1 < \tau_2$ f.s. $\Longrightarrow \mathscr{F}_{\tau_1} \subset \mathscr{F}_{\tau_2}$.

Aufgabe G26
Sei $(X_t)_{t\geq 0}$ ein adaptierter, stetiger, reellwertiger Prozess und $c \in \mathbb{R}$. Definiere desweiteren $\tau = \inf\{t \geq 0 \mid X_t \geq c\}$, A als die Menge aller Pfade, deren Supremum echt größer ist als $c - 5$ und B als die Menge aller Pfade, deren Supremum echt größer ist als $c + 5$.
Gilt $A \in \mathscr{F}_\tau$, $B \in \mathscr{F}_\tau$?