Stochastische Prozesse
4. Übungsblatt

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Volker Betz
Stefan Walter

WiSe 2012/2013
16.11.2012

Vortragsaufgaben

Aufgabe H5
Es sei $(X_t)_{t\geq 0}$ die Brownsche Bewegung. Zeige, dass für alle $s \geq 0$ und alle $\epsilon > 0$ gilt

$$\mathbf{P}(\exists C \in [0,\infty) \text{ mit } |X_t - X_s| \leq C\sqrt{|t-s|} \quad \forall t \text{ mit } |t-s| \leq \epsilon) = 0 \quad ,$$

d.h. dass ein 'typischer' Pfad der Brownschen Bewegung in keinem Punkt $\frac{1}{2}$-Hölderstetig ist.
Hinweis. Zeige zunächst dass für alle $C \geq 0$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}(|X_{s+2^{-n}} - X_{s+2^{-(n+1)}}| \geq C 2^{-\frac{n+1}{2}}) = \infty \quad .$$

Aufgabe H6
Es sei $(X_t)_{t\geq 0}$ eine Brownsche Bewegung und

$$Y_t := e^{\beta t}\, e^{\alpha X_t - \frac{\alpha^2}{2} t} \quad , \alpha, \beta \in \mathbb{R} \quad .$$

(a) Berechne Erwartungswert und Varianz von Y_t.

(b) Zeige

$$\lim_{t\to\infty} Y_t = \begin{cases} \infty & ,\text{falls } \beta > \frac{\alpha^2}{2} \\ 0 & ,\text{falls } \beta < \frac{\alpha^2}{2} \end{cases} \quad \mathbf{P}\text{-f.s.} \quad .$$

(c) Vergleiche das Ergebnis aus b) mit dem Langzeitverhalten von $\mathbb{E}[Y_t]$ und $\mathrm{Var}(Y_t)$.

Gruppenübung

Aufgabe G13
Sei $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Orthonormalbasis von $L_2[0,1]$ und $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ unabhängige und identisch standardnormalverteilte Zufallsvariablen. Zeige dass dann für alle $t \in [0,1]$ die Reihe

$$X_t = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \int_0^t \phi_n(s)\, ds$$

fast sicher und in L^2 konvergiert, sowie die Eigenschaften aus Proposition 2.14 der Vorlesung erfüllt.

Aufgabe G14
Betrachte die Brownsche Bewegung $(X_t)_{t\geq 0}$. Zeige, dass dann für beliebiges $k \in \mathbb{N}$ gilt

$$\mathbb{E}[X_t^{2k}] = \frac{(2k)!}{2^k k!} t^k \, .$$

Wo fand dies in der Vorlesung Verwendung?

Aufgabe G15
Betrachte die Brownsche Bewegung $(X_t)_{t\geq 0}$. Überlege dass...

- ... für $s > 0$ fest, $Y_t := X_{t+s} - X_s$ und
- ... für $c > 0$ fest, $Z_t := \frac{1}{\sqrt{c}} X_{ct}$

jeweils wieder die Brownsche Bewegung ergibt.

Aufgabe G16
Betrachte die Brownsche Bewegung $(X_t)_{t\geq 0}$. Zeige

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} X_t = 0 \quad \text{f.s.} \quad .$$

Aufgabe G17
Betrachte die Brownsche Bewegung $(X_t)_{t\geq 0}$.

(a) Zeige dass die bedingte Verteilung von $X(s)$, gegeben dass $X(t) = b$, für $s < t$ normalverteilt ist mit Erwartungswert und Varianz

$$\mathbb{E}[X(s) \mid X(t) = b] = \frac{bs}{t} \quad ,$$
$$\mathrm{Var}(X(s) \mid X(t) = b) = \frac{s(t-s)}{t} \quad .$$

Was ist bei der Varianz auffällig?

(b) Seien $t_1 < s < t_2$. Berechne die bedingte Verteilung von X(s), gegeben dass $X(t_1) = a$ und $X(t_2) = b$.