Stochastische Prozesse
13. Übungsblatt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Volker Betz
Stefan Walter

WiSe 2012/2013
08.02.2013

Vortragsaufgaben

Aufgabe H23
Sei $(X_t)_{t\geq 0}$ die Brownsche Bewegung. Verwende die Itō-Formel um Darstellungen von

- $Y_t = \int\limits_0^t e^{X_s} dX_s$ und
- $Z_t = \int\limits_0^t X_s e^{X_s^2} dX_s$

zu erhalten, die keine stochastischen Integrale beinhalten.

Aufgabe H24
Zeige dass die mehrdimensionale Itō-Formel ihre Gültigkeit behält, wenn man die reellwertige Funktion $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ durch eine komplexe Funktion $f = u + \mathbf{i}v : \mathbb{R}^m \to \mathbb{C}$ ersetzt.

Gruppenübung

Aufgabe G50
Sei $(X_t)_{t\geq 0}$ die Brownsche Bewegung und betrachte erneut für ein $a > 0$

$$\tau_a = \inf\{t \geq 0 \mid X_t \geq a\}.$$

Versuche mithilfe der vorhandenen Kenntnis über $Y_t := e^{\alpha X_t - \frac{1}{2}\alpha^2 t}$, $\alpha > 0$, die Laplace-Transformierte

$$\Psi_a : [0, \infty) \to \mathbb{R}, \quad \psi \mapsto \mathbb{E}[e^{-\psi \tau_a}]$$

zur Verteilung von τ_a zu bestimmen.

Aufgabe G51
Es sei $(X_t)_{t\geq 0}$ die Brownsche Bewegung. Weise nach, dass der Prozess $Y_t = \frac{X_t}{1+t}$ die stochastische Differentialgleichung

$$dY_t = -\frac{1}{1+t} Y_t dt + \frac{1}{1+t} dX_t$$

löst.

Aufgabe G52
Sei $(X_t)_{t\geq 0}$ die Brownsche Bewegung. Verwende die Itō-Formel um nachzuweisen, dass

$$Y_t = (X_t + t) e^{-X_t - \frac{t}{2}}$$

ein Martingal ist.

Aufgabe G53
Gegeben sei eine n-dimensionale Brownsche Bewegung $\mathbf{X} = (X^{(1)}, \dots, X^{(n)})$ für $n \geq 2$. Betrachte weiterhin

$$R_t = \sqrt{\left(X_t^{(1)}\right)^2 + \dots + \left(X_t^{(n)}\right)^2}.$$

Diskutiere ob die aus der Vorlesung bekannte Itō-Formel hier anwendbar ist. Mit welchem Argument ist es legitim, sie gegebenenfalls dennoch anzuwenden?

Aufgabe G54
Gegeben seien zwei Itō-Prozesse $(Y_t^{(1)})_{t\geq 0}$ und $(Y_t^{(2)})_{t\geq 0}$ mit $Y_t^{(2)} \neq 0$ f.s. $\forall t \geq 0$. Handelt es sich dann bei

- $(Y_t^{(1)} \cdot Y_t^{(2)})_{t\geq 0}$
- $\left(\frac{Y_t^{(1)}}{Y_t^{(2)}}\right)_{t\geq 0}$

ebenfalls um Itō-Prozesse?