Stochastische Prozesse
1. Übungsblatt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Volker Betz
Stefan Walter

WiSe 2012/2013
26.10.2012

Allgemeine Informationen
Das erste Übungsblatt befasst sich mit zeit-diskreten Markovketten und stellt somit für Teilnehmer der Vorlesung über Markovketten aus dem Sommersemester 2012 zum Teil eine Wiederholung dar.

Es wird erneut die Möglichkeit geben mithilfe der Übungsblätter einen Prüfungsbonus zu erwerben. Die entsprechenden Spezialaufgaben starten auf dem 2.Übungsblatt. Die Modalitäten sind dem Informationsblatt zu entnehmen, welches auf TuCan bereitsteht.

Gruppenübung

Aufgabe G1
Seien $Z_0, Z_1, \ldots$ unabhängige, identisch verteilte Zufallsvariablen, so dass $Z_i = 1$ mit Wahrscheinlichkeit p und $Z_i = 0$ mit Wahrscheinlichkeit $1-p$. Setze zudem $S_0 = 0$, $S_n = Z_1 + \ldots + Z_n$. Bestimme in jedem der folgenden Fälle, ob es sich bei $(X_n)_{n\geq 0}$ um eine Markovkette handelt:

(a) $X_n = Z_n$,

(b) $X_n = S_n$,

(c) $X_n = S_0 + \ldots + S_n$,

(d) $X_n = (S_n,\ S_0 + \ldots + S_n)$.

Bestimme gegebenenfalls Zustandsraum und Übergangsmatrix. Gib andernfalls ein Beispiel an, für das

$$\mathbf{P}(X_{n+1} = i \mid X_n = j,\ X_{n-1} = k)$$

nicht unabhängig von k ist.

Aufgabe G2
Gegeben seien Stoppzeiten S, T und T_k, $k \in \mathbb{N}$, für den stochastischen Prozess $\mathbf{X} = (X_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$, ausgestattet mit der *natürlichen Filtration*[1]. Entscheide und beweise gegebenenfalls, ob es sich im folgenden um Stoppzeiten handelt:

- $\min\{S, T\}$,
- $S + T$,
- $S - T$,
- $\sup\limits_{k\in\mathbb{N}} T_k$.

Aufgabe G3
Betrachte die Markovkette mit Übergangsmatrix

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{3}{4} & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Zeige, dass diese Kette irreduzibel und aperiodisch ist.

(b) Berechne die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sich die Kette nach 2 Schritten im Zustand 3 befindet, gegeben dass sie in Zustand 1 startet.

[1] vgl. 'wichtigstes Beispiel' zu Definition 1.9 aus der Vorlesung

(c) Bestimme die Matrix $\lim_{n\to\infty} P^n$.

Aufgabe G4

Weise nach, dass die einfache symmetrische Irrfahrt auf $\mathbb{Z}$ (vgl. Beispiel 1.2 aus der Vorlesung) ...

- ... rekurrent ist.
- ...nicht positiv rekurrent ist.

Aufgabe G5

Vervollständige den Beweis zu Proposition 1.20 aus der Vorlesung.
Zur Erinnerung: Gegeben sei eine zeitdiskrete Markov-(z,P)-Kette $(X_t)_{t\in\mathbb{N}}$ mit Werten in E abzählbar. Bezeichne mit τ_z die erste Rückkehrzeit nach z, sowie mit $X^z:\ \Omega \to l_0(E),\ \bar{X} \equiv (\bar{X}_t)_{t\in\mathbb{N}} \ \mapsto (\bar{X}_t)_{t\le\tau_z(\bar{X})}$ (wobei $l_0(E)$ die Menge aller endlichen oder unendlichen E-wertigen Folgen angibt) die erste Exkursion von $(X_t)_{t\in\mathbb{N}}$ von z aus. $X^{z,1}, X^{z,2}, \dots$ seien unabhängig und identisch verteilte Kopien von X^z. Für

$$(Y_t)_{t\in\mathbb{N}} = \begin{cases} (X^{z,1}, X^{z,2}, \dots, X^{z,L}) & \text{falls } L<\infty \\ (X^{z,1}, X^{z,2}, \dots) & \text{falls } L=\infty \end{cases},$$

mit der Zufallsvariablen $L := \Omega^{\mathbb{N}} \to \mathbb{N},\ \omega \mapsto \min\{k\in\mathbb{N}:\ \tau_{z,k}(\omega) \equiv \tau_z(\omega_k) = \infty\}$, ist zu zeigen, dass gilt

$$(Y_t)_{t\in\mathbb{N}} \stackrel{d}{=} (X_t)_{t\in\mathbb{N}}.$$