Stochastische Prozesse
12. Übungsblatt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Volker Betz
Stefan Walter

WiSe 2012/2013
01.02.2013

Vortragsaufgaben

Aufgabe H21
Sei $(X_t)_{t\geq 0}$ die Brownsche Bewegung.

(a) Seien $0 \leq a < b \leq T$ und $\xi \in L^2(\mathbf{P})$ $\mathscr{F}_a$-messbar (aber nicht zwangsläufig beschränkt). Zeige dass gilt

$$\xi \cdot \mathbf{1}_{[a,b)} \in \mathscr{L}_T^2$$

und

$$\int_0^T \xi \cdot \mathbf{1}_{[a,b)}(s) dX_s = \xi \cdot (X_b - X_a).$$

(b) Zeige analog zu Satz 3.20 aus der Vorlesung (d.h. noch ohne Zuhilfenahme der Itō-Formel), dass für $T > 0$ gilt

$$\int_0^T X_s^2 dX_s = \frac{1}{3} X_T^3 - \int_0^T X_s ds.$$

Aufgabe H22
Im Beweis von Proposition 3.30 wurde vorausgesetzt, dass für $f \in \mathscr{L}_T^2$ und alle $t \leq T$

$$\int_0^t |\, f_s(\cdot)\,|^2 ds \ \in m\mathscr{F}_t.$$

Weise dies nun nach.

Gruppenübung

Aufgabe G46
Sei $(X_t)_{t\geq 0}$ die Brownsche Bewegung. Welche der folgenden stochastischen Integrale ergeben Sinn?

(a)

$$\int_0^1 (X_t^2 + 2X_{\frac{t}{2}} + 1) dX_t,$$

(b)

$$\int_0^1 X_{2t} dX_t,$$

(c)

$$\int_1^\infty X_{\frac{1}{t}} dX_t,$$

(d)

$$\int_0^1 X_{\frac{1}{t}} dX_t$$

(e)

$$\int_0^1 X_{2t} dt + \int_0^1 X_{\frac{t}{2}} dX_t.$$

Aufgabe G47
Weise nach, dass es sich bei

$$\mathscr{P} = \{\Gamma \mid \Gamma \subset [0,T] \times \Omega,\ \Gamma \cap ([0,t] \times \Omega) \in \mathscr{B}[0,t] \otimes \mathscr{F}_t \quad \forall\ t \leq T\}$$

tatsächlich um eine σ-Algebra handelt.

Aufgabe G48
Gegeben seien bezüglich der Filtration $(\mathscr{F}_t)_{t\geq 0}$ ein progressiv messbarer Prozess $(X_t)_{t\geq 0}$, sowie eine Stoppzeit τ. Zeige, dass dann auch der gestoppte Prozess $(X_t^\tau)_{t\geq 0}$ progressiv messbar ist.

Aufgabe G49

- Sei $(B_t)_{t\geq 0}$ die Brownsche Bewegung bezüglich $(\mathscr{F}_t)_{t\geq 0}$, sowie X_0 Cauchy-verteilt[1] und unabhängig von der Brownschen Bewegung. Für alle $t \geq 0$ sei $\mathscr{G}_t$ die von $\mathscr{F}_t$ und X_0 erzeugte σ-Algebra.
  Zeige, dass für $M_t := X_0 B_t$ der stochastische Prozess $(M_t)_{t\geq 0}$ bezüglich $(\mathscr{G}_t)_{t\geq 0}$ zwar ein lokales Martingal, aber kein Martingal ist.
- Zeige dass es sich bei jedem stetigen, lokalen Martingal, welches nicht-negativ und integrierbar ist, um ein Supermartingal handelt.

[1] Beachte dass eine Cauchy-verteilte Zufallsvariable keine Momente besitzt!