Stochastische Prozesse
10. Übungsblatt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Volker Betz
Stefan Walter

WiSe 2012/2013
18.01.2013

Vortragsaufgaben

Aufgabe H17
Sei $\mathscr{D} = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_2 > 0\}$ und f eine Funktion, die auf $\partial\mathscr{D}$ definiert ist durch $x_1 \mapsto \mathbf{1}_{[-1,1]}(x_1)$. Leite mithilfe von Aufgabe H12 her, dass die Funktion

$$h(x_1, x_2) = \frac{1}{\pi} \arctan\left(\frac{1-x_1}{x_2}\right) - \frac{1}{\pi} \arctan\left(\frac{-(1+x_1)}{x_2}\right)$$

das Dirichlet-Problem lößt.
Bemerkung. In der Vorlesung wurde bereits erwähnt, dass Aussagen zum Dirichlet-Problem zum Teil unter noch allgemeineren Bedingungen gelten. Unter diesem Aspekt können die beiden Unstetigkeitsstellen von f, sowie die Unbeschränktheit von $\mathscr{D}$ (aufgrund von Approximationsargumenten mit geeigneten $\{D_n\}$) hier vernachlässigt werden.

Aufgabe H18
Verwende Satz 2.104 aus der Vorlesung, um die (deterministische) Aussage nachzuweisen, dass jede beschränkte harmonische Funktion auf $\mathbb{R}^n$ konstant ist.
Bemerkung. Eine ähnliche Übungsaufgabe mit charakteristischer Lösungsmethode wurde bereits in der Vorlesung zu Markovketten behandelt.

Gruppenübung

Aufgabe G38
Zeige dass es sich bei den in der Vorlesung vorgestellten Beispielen tatsächlich um harmonische Funktionen auf $\mathscr{D}$ handelt:

$$\begin{aligned} h_1(x) &= x && \text{auf } \mathscr{D} = \mathbb{R}, \\ h_2(\bar{x}) \equiv h_2(x_1, x_2) &= \log|\bar{x}| && \text{auf } \mathscr{D} = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}, \\ h_3(\bar{x}) \equiv h_3(x_1, \dots, x_n) &= \frac{1}{|\bar{x}|^{n-2}} && \text{auf } \mathscr{D} = \mathbb{R}^n \setminus \{0\},\ n \geq 3. \end{aligned}$$

Bemerkung. Die Bedeutung dieser harmonischen Funktionen wird in den restlichen Aufgaben deutlich werden.

Aufgabe G39
Seien $0 < r_1 < r_2$, $\mathscr{D} = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid r_1 < |x| < r_2\}$ und $f : \partial\mathscr{D} \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion auf dem Rand.

(a) Ist die Lösung des zugehörigen Dirichlet-Problems eindeutig?

(b) Gibt es unter Berücksichtigung der G38, sowie Aufgabenteil a), eine clevere Möglichkeit zu zeigen, dass für die Brownsche Bewegung mit Start in $x \in \mathscr{D}$ gilt

$$\mathbf{P}^x((X_t) \text{ verlässt } \mathscr{D} \text{ über den äußeren Ring}) = \frac{\log|x| - \log r_1}{\log r_2 - \log r_1} \quad ?$$

(c) Was lässt sich über die obige Wahrscheinlichkeit in den Grenzfällen aussagen, d.h. wenn gilt $r_1 \downarrow 0$ bzw. $r_2 \uparrow \infty$?

Aufgabe G40
Sei $n \geq 2$. Zeige dass jeder Punkt $x \in \mathbb{R}^n$ polar ist, d.h.

$$\mathbf{P}_y(\tau_{\{x\}} < \infty) = 0 \quad \forall y \in \mathbb{R}^n.$$

Hinweis. Setze oBdA $x = 0$ und modelliere analog zu Aufgabe G39. Auf diese Weise lässt sich auch Aufgabe G38 verwenden.

Aufgabe G41
Sei $\mathscr{D} = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_2 > 0\}$ und f eine Funktion, die auf $\partial\mathscr{D}$ definiert ist durch $x_1 \mapsto x_1 \cdot \mathbf{1}_{(-1,1)}(x_1)$. Gib analog zu Aufgabe H17 eine konkrete Lösung des zugehörigen Dirichlet-Problems an.