Stochastische Prozesse
5. Übungsblatt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Volker Betz
Stefan Walter

WiSe 2012/2013
23.11.2012

Vortragsaufgaben

Aufgabe H7
Sei $(X_t)_{t\geq 0}$ die Brownsche Bewegung. Für gegebene $s < t$, definiere

$$W = X_{\frac{t+s}{2}} - \frac{X_t + X_s}{2}.$$

(a) Berechne die Verteilung von W.
(b) Zeige dass W unabhängig von X_s und X_t ist.
(c) Was lässt sich dann über die Kurve $t \mapsto X_t$ aussagen?

Aufgabe H8
Sei $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit $f(0) = 0$. Zeige dass für die Brownsche Bewegung $(X_t)_{t\geq 0}$ und $\epsilon > 0$ gilt

$$\mathbf{P}\left(\sup_{0\leq t\leq 1} |X(t) - f(t)| < \epsilon\right) > 0.$$

Gruppenübung

Aufgabe G18
Sei $Y \sim \mathcal{N}(0,1)$ und setze $X_t = \sqrt{t}Y$ für $t \geq 0$. Handelt es sich bei $(X_t)_{t\geq 0}$ um die Brownsche Bewegung? Welche Eigenschaften gelten, und welche nicht?

Aufgabe G19
Es sei $(X_t)_{t\geq 0}$ die Brownsche Bewegung und π eine Partition des Intervalls $[0,t]$. Weise nach, dass gilt

(a) $\mathbb{E}[\langle X\rangle_{t,\pi}] = t$,
(b) $\mathrm{Var}(\langle X\rangle_{t,\pi}) \leq |\pi|\ t\ \mathrm{Var}(X_1^2)$.

Aufgabe G20
Es sei $(X_t)_{t\geq 0}$ die Brownsche Bewegung. Zeige folgende Rekurrenzeigenschaft: Für jedes $a \in \mathbb{R}$ gilt

$$\mathbf{P}(\forall t\ \exists s \geq t\ X_s = a) = 1.$$

Hinweis. Verwende das Gesetz vom iterierten Logarithmus.

Aufgabe G21
Betrachte erneut die Brownsche Bewegung. Weise nach, dass fast sicher eine Familie

$$0 = t_0^{(n)} \leq t_1^{(n)} \leq \ldots \leq t_{k(n)-1}^{(n)} \leq t_{k(n)}^{(n)} = t$$

von Partitionen existiert, so dass

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{k(n)} (X(t_j^{(n)}) - X(t_{j-1}^{(n)}))^2 = \infty.$$

Hinweis. Betrachte Partitionen bestehend aus Intervallen der Form $[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}]$.