Stochastische Prozesse
11. Übungsblatt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Volker Betz
Stefan Walter

WiSe 2012/2013
25.01.2013

Vortragsaufgaben

Aufgabe H19
Es sei $(X_t)_{t\geq 0}$ eine Brownsche Bewegung auf $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$ mit $X_0 = 0$.

(a) Es sei $h : [0,1] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion von beschränkter Variation mit $h(1) = 0$. Zeige dass für einen typischen Pfad der Brownschen Bewegung gilt

$$\int_0^1 h(s) dX_s(\omega) = -\int_0^1 X_s(\omega) dh(s), \tag{1}$$

und folgere dass

$$\mathbb{E}[\int_0^1 h(s) dX_s] = 0.$$

(b) Zeige dass die Isometrie

$$\mathbb{E}[(\int_0^1 h(s) dX_s)^2] = \int_0^1 h^2(s) ds$$

gilt.

Bemerkung. Wiener und Paley benutzten (1) zur Definition des stochastischen Integrals (linke Seite).

Aufgabe H20

Es sei $(X_t)_{t\geq 0}$ eine Brownsche Bewegung auf $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$ mit $X_0 = 0$ und $\Phi(h) := \int_0^1 h(s) dX_s, \quad h \in L^2([0,1])$, das in Aufgabe H19 konstruierte Integral.

Zeige dass $\Phi(h)$ eine normalverteilte Zufallsvariable mit Erwartungswert 0 und Varianz $\int_0^1 h^2(s) ds$ ist.

Gruppenübung

Aufgabe G42
Die Doob-Zerlegung garantiert für ein $(\mathscr{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$-Submartingal $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine eindeutige Zerlegung als

$$X_n = M_n + A_n, \quad n \in \mathbb{N},$$

wobei $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ein $(\mathscr{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$-Martingal und $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ein monoton wachsender, $(\mathscr{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$-vorhersagbarer Prozess mit $A_0 = 0$ ist.

(a) Setze

$$X_n = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{1}_{B_n} \quad \text{für } B_n \in \mathscr{F}_n.$$

Wie lautet die Doob-Zerlegung von X_n?

(b) Es seien $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ unabhängige, identisch verteilte, integrierbare Zufallsvariablen. Bestimme die Doob-Zerlegung bezüglich der kanonischen Filtration $(\mathscr{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

(c) Es seien $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ unabhängige, normalverteilte Zufallsvariablen derart, dass X_n Erwartungswert 1 und Varianz n habe. Setze $Y_n = \prod_{k=1}^{n} X_k$. Berechne die Doob-Zerlegung von $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bezüglich der von $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ erzeugten Filtration.

Aufgabe G43

Zeige dass sowohl die Brownsche Bewegung, als auch die geometrische Brownsche Bewegung in dem Raum $L^2(\lambda_T \otimes \mathbf{P}) = L^2([0,T] \times \Omega, \lambda \otimes \mathbf{P})$ liegen.

Aufgabe G44

Gegeben seien zwei L^2-Martingale $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(N_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bezüglich der Filtration $(\mathscr{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Weise nach, dass es sich bei

$$(M_n N_n - \langle M, N\rangle_n)_{n\in\mathbb{N}}$$

um ein Martingal handelt.

Aufgabe G45

Sei $(B_t)_{t\geq 0}$ eine Brownsche Bewegung bzgl. der Filtration $(\mathscr{F}_t)_{t\geq 0}$. Zeige mithilfe einer geeigneten Approximation durch einfache Prozesse, dass gilt

$$\int_0^t s \, dB_s = t \cdot B_t - \int_0^t B_s \, ds.$$