Stochastische Prozesse
2. Übungsblatt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Volker Betz
Stefan Walter

WiSe 2012/2013
02.11.2012

Vortragsaufgaben

Aufgabe H1
Die Anzahl der Anrufe pro Stunde bei einer Hotline folge einem Poisson-Prozess mit Rate $\lambda = 4$.

(a) Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass weniger als 2 Anrufe in der ersten Stunde eintreffen?

(b) Angenommen in der ersten Stunde treffen 6 Anrufe ein. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass in der zweiten Stunde mindestens zwei Anrufe eintreffen?

(c) Student S., der als Hilfskraft die Anrufe bei der Hotline entgegennimmt, wartet 15 Anrufe ab, bevor er in die Mensa geht. Wie lange muss er durchschnittlich warten?

(d) Student S. hat in den ersten zwei Stunden 8 Anrufe entgegengenommen. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass genau 5 davon in der ersten Stunde eintrafen?

(e) Student S. hat in den ersten vier Stunden k Anrufe entgegengenommen. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass genau j davon in der ersten Stunde eintrafen?

Aufgabe H2
Sei $\mathscr{L}$ der Generator des Poisson-Prozesses. Zeige dass dann gilt

$$e^{t\mathscr{L}} f(x) = \mathbb{E}[f(N_t) \mid N_0 = x].$$

Gruppenübung

Aufgabe G6

(a) Man wiederhole kurz, weshalb für eine Zufallsvariable $X \sim \text{Poi}(\lambda)$ gilt: $\mathbb{E}[X] = \lambda$.

(b) Welche Eigenschaften eines Poisson-Prozesses wurden in der Vorlesung erläutert?

(c) Wie sind die Sprungstellen eines Poisson-Prozesses in einem festen Intervall verteilt?

Aufgabe G7
Es sei $\mathbf{L} = (L_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ ein Poisson-Prozess mit Rate λ und $\mathbf{M} = (M_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ ein Poisson-Prozess mit Rate μ. Ist

$$\mathbf{N} := \mathbf{L} + \mathbf{M}$$

dann ebenfalls ein Poisson-Prozess?

Aufgabe G8
Wie lautet die gemeinsame Verteilung von $S_1,\ S_2,\ S_3$ für einen Poisson-λ-Prozess?

Aufgabe G9 (compound Poisson process)
Sei $\mathbf{N} = (N_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ ein Poisson-λ-Prozess und $(Y_j)_{j\in\mathbb{N}}$ u.i.v. Zufallsvariablen, die unabhängig von $\mathbf{N}$ sind. Definiere den zeitstetigen Prozess $\mathbf{Z} = (Z_t)_{t\in[0,1]}$ durch

$$Z_t = \sum_{j=1}^{N_t} Y_j.$$

(a) Gib die charakteristische Funktion von Z_t, d.h.

$$\varphi_{Z_t}(x) := \mathbb{E}[e^{ixZ_t}],$$

über die charakteristische Funktion von Y_1, $\varphi_{Y_1}(x)$, an.

(b) Zeige dass auch **Z** sationäre und unabhängige Inkremente besitzt.

(c) Weise nach, dass für jedes $t \in (0, 1)$ die Menge aller in t *stetigen* Pfade des Prozesses **Z** die Wahrscheinlichkeit 1 besitzt.

(d) Wie hoch ist andererseits die Wahrscheinlichkeit, dass ein Pfad auf einem Intervall $[0, t]$ stetig ist?