Stochastische Prozesse
9. Übungsblatt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Volker Betz
Stefan Walter

WiSe 2012/2013
21.12.2012

Vortragsaufgaben

Aufgabe H15
Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ein Martingal mit beschränkten Inkrementen, d.h. mit der Eigenschaft

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} |X_{n+1} - X_n| =: Y \quad \in \mathscr{L}^1.$$

Definiere außerdem

$$C := \{\omega \in \Omega \mid \exists \lim_{n\to\infty} X_n(\omega) \in \mathbb{R}^1\},$$
$$D := \{\limsup_{n\to\infty} X_n = \infty,\ \liminf_{n\to\infty} X_n = -\infty\}.$$

Zeige dass das Martingal dann mit Wahrscheinlichkeit 1 konvergiert oder oszilliert; zeige also

$$\mathbf{P}(C \cup D) = 1.$$

Aufgabe H16
Es seien $(Z_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ unabhängige, identisch auf $\{-1, 0, 1\}$ gleichverteilte Zufallsvariablen auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$, sowie $S_n = \sum_{k=0}^{n} Z_k$, $n \in \mathbb{N}_0$ die zugehörige Irrfahrt. Für $n \in \mathbb{N}_0$ setze desweiteren $X_n = S_n^2 - n$ und

$$T_n = \inf\{k \in \mathbb{N}_0 \ :\ |S_k| \geq n \text{ oder } k \geq n^2\}.$$

Zeige zunächst dass $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ein Supermartingal bezüglich einer geeigneten Filtration ist und anschließend dass $\mathbb{E}[X_{T_n}]$ monoton fallend in $n \in \mathbb{N}_0$ ist.

Gruppenübung

Aufgabe G35
Es sei $(X_t)_{t\geq 0}$ die Brownsche Bewegung, mit zugehöriger rechtsstetiger Filtration $(\mathscr{F}_t)_{t\geq 0}$.
Handelt es sich bei den folgenden Prozessen um Martingale?

- $e^{\frac{t}{2}} \cos(X_t), \quad t \geq 0$
- $e^{\frac{t}{2}} \sin(X_t), \quad t \geq 0$

Aufgabe G36 (Petersburger Spiel)
Seien $I = \mathbb{N}_0$, $D_1, D_2, \ldots$ unabhängig und identisch verteilt mit $\mathbf{P}(D_i = -1) = \mathbf{P}(D_i = 1) = \frac{1}{2}$ für jedes $i \in \mathbb{N}$ und $\mathscr{F}$ die von $(D_n)_{n\in\mathbb{N}}$ erzeugte Sigma-Algebra. D_i kann interpretiert werden als das Ergebnis einer Wette, die uns pro Spielschein einen Gewinn oder Verlust von einer Geldeinheit bringt. Als Spielstrategie $(H_n)_{n\in\mathbb{N}}$, d.h. als Anzahl der in den Spielrunden eingesetzten Spielscheine, wählen wir die Verdoppelungsstrategie, also

$$H_n := 2^{n-1}\, \mathbf{1}_{\{D_1 = D_2 = \ldots = D_{n-1} = -1\}} \quad \text{für } n \in \mathbb{N},$$

sowie $H_0 = 1$. Desweiteren werde mit $S_n = \sum_{i=1}^{n} H_i D_i$ der Kontostand nach der n-ten Runde bezeichnet.

(a) Man überlege sich, dass $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ein Martingal ist und $S_n \leq 1$ fast sicher für jedes $n \in \mathbb{N}$.

(b) Zeige und begründe warum $\lim_{n\to\infty} S_n = 1$ fast sicher, obwohl $\mathbb{E}[S_n] = 0$ für jedes $n \in \mathbb{N}$.

Aufgabe G37

Teilnehmern der Vorlesung über Markovketten ist der Galton-Watson-Prozess $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ bereits ein Begriff.
Seien $(X_{n,i})_{n\in\mathbb{N}_0, i\in\mathbb{N}}$ u.i.v. Zufallsvariablen mit $\mathbf{P}(X_{1,1} = k) = p_k$ für $k \in \mathbb{N}_0$ und einen Wahrscheinlichkeitsvektor $p = (p_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$. Setze $Z_0 = 1$ und induktiv

$$Z_{n+1} = \sum_{i=1}^{Z_n} X_{n,i} \quad \text{für } n \in \mathbb{N}_0.$$

Die Zufallsvariable Z_n kann interpretiert werden als Größe einer Population zur Zeit n und $X_{n,i}$ als Anzahl der Nachkommen des i-ten Individuums aus der n-ten Generation.
Es gelte ferner $m := \mathbb{E}[X_{1,1}] < \infty$ für die erwartete Kinderanzahl pro Individuum und $\mathrm{Var}(X_{1,1}) \in (0, \infty)$ für die Varianz der Kinderzahl. Setze $\mathscr{F}_n := \sigma(X_{k,i} \ : \ k < n, \ i \in \mathbb{N})$ und $W_n := \frac{1}{m^n} Z_n$.

(a) Zeige dass es sich bei $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ um ein Martingal handelt.

(b) Zeige dass der Grenzwert $\lim_{n\to\infty} W_n =: W_\infty$ fast sicher existiert und dass gilt

$$m > 1 \quad \Leftrightarrow \quad \mathbb{E}[W_\infty] = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \mathbb{E}[W_\infty] > 0.$$

Hinweis. Formuliere die Varianz von W_n in Abhängigkeit von Z_{n-1} und lege so die Voraussetzungen für den L^2-Konvergenzsatz für Martingale.