Diskrete Mathematik

Andreas Paffenholz

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WiSe 2022/23
02. Februar 2023
Aufgabenblatt 14

Aufgabe 14.1: Boolsche Funktionen

Eine *boolsche Funktion* in n Variablen $x_1, \ldots, x_n$ ist eine Abbildung $f : \{0,1\}^n \longrightarrow \{0,1\}$. Solche Funktionen können durch *logische Formeln* beschrieben werden. Eine *logische Formel* is eine Zeichenkette in den Variablen $x_1, \ldots, x_n$ (die mehrfach vorkommen dürfen), den Klammern (und), Leerzeichen, sowie den *logischen Symbolen* $\wedge$ (und), $\vee$ (oder), $\Rightarrow$ (Implikation), $\Leftrightarrow$ (Äquivalenz) und $\neg$ (Negation), die einigen syntaktischen Regeln folgt (z.B. treten Klammern paarweise und geschachtelt auf).

Diese syntaktischen Regeln wollen wir im folgenden ignorieren und jede Kette der n Variablen und 8 Symbole als logische Formel ansehen.

Zeigen Sie, dass es boolsche Funktionen gibt, die nicht durch eine logische Formel mit weniger als $\frac{2^n}{\log_2(n+8)}$ Symbolen beschrieben werden kann.

Bemerkung: Z.B. sind Computerprogramme, die n Bits einlesen und als Antwort *ja* oder *nein* ausgeben, boolsche Funktionen. Es gibt also Funktionen, für die es kein kurzes Programm zu ihrer Berechnung gegben kann.

Aufgabe 14.2: Magische Quadrate

Eine $(n \times n)$-Tabelle M heißt *magisches* Quadrat, wenn in den n^2 Zellen alle Zahlen $1, \ldots, n^2$ so eingetragen sind, dass die Summe jeder Zeile, jeder Spalten und der beiden Diagonalen gleich sind. M heißt *halbmagisch*, wenn die Summe jeder Zeile und Spalte gleich sind.

1. Zeigen Sie, dass Sie aus einem Paar orthogonaler lateinischer Quadrate ein halbmagisches Quadrat konstruieren können.

   Hinweis: Es könnte helfen, sich die Zahlen in der Basis n vorzustellen und die Zahlen des einen Quadrats als die Einerstellen und die des anderen als die n-er-Stellen vorzustellen.
2. Was müssen die lateinischen Quadrate erfüllen, damit man ein magisches Quadrat erhält?
3. Können Sie magische Quadrate für kleine n konstruieren?

Aufgabe 14.3: Fixpunkte

Sei $X(\sigma)$ die Anzahl der Fixpunkte in einer Permutation $\sigma \in S_n$. Bestimmen Sie den Erwartungswert von X.

Aufgabe 14.4: Zufallsgraphen

Wir erzeugen einen Graph G mit n Knoten zufällig, indem wir jede der $m_{\text{max}} := \binom{n}{2}$ möglichen Kanten mit Wahrscheinlichkeit $p = \frac{1}{2}$ in den Graph aufnehmen.

1. Zeigen Sie, dass G fast sicher zusammenhängend ist.
2. Zeigen Sie, dass G fast sicher ein Dreieck enthält.