Diskrete Mathematik

Andreas Paffenholz

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WiSe 2022/23
12. Januar 2023
Aufgabenblatt 11

Aufgabe 11.1: Kreise

1. Charakterisieren Sie alle Graphen mit $\chi(G) \leq 2$.
2. Sei G ein (nicht notwendig planarer) Graph mit der Eigenschaft, dass je zwei ungerade Kreise einen gemeinsamen Knoten haben. Zeigen Sie, dass dann $\chi(G) \leq 5$.

   Hinweis: Sei C ungerade. Dann hat $G - C$ keinen ungeraden Kreis.

Aufgabe 11.2: Spernerlemma

Beenden Sie den Beweis des Spernerlemmas aus der Vorlesung, d.h. zeigen Sie, dass auch in Dimensionen $n \geq 3$ jede Spernerfärbung eine Regenbogenzelle haben muss.

Aufgabe 11.3: Hex

Das Spiel Hex wird von zwei Spieler·inne·n A und B auf einem hexagonalen $(n \times n)$-Gitter wie in Abb. 1 gespielt. A und B setzen abwechselnd dunkelgraue bzw. hellgraue Steine auf das Feld. A versucht, einen durchgehenden Pfad von links nach rechts, B von oben nach unten zu erreichen. Dabei ist ein Pfad für A *durchgehend*, wenn er nur aus dunkelgrauen, entlang einer Kante benachbarten, Steinen besteht, die die rechte Feldseite mit der linken verbinden (analog für B). Im Bild hat A einen durchgehenden Pfad.

Wir wollen zeigen, dass es in diesem Spiel immer eine·n Sieger·in geben muss.

1. Wir können annehmen, dass bis zum Ende gespielt wird, alle Felder also dunkel- oder hellgrau sind. Definieren Sie einen ebenen Graphen, indem Sie jedem Feld einen Knoten zuweisen, die mit einer Kante verbunden sind, wenn die zugehörigen Felder benachbart sind. Fügen Sie vier weitere Knoten v_l, v_r, v_o, v_u links, rechts, oben und unten hinzu, die mit den Feldern ihrer Seite verbunden sind (also z.B. der Knoten v_o oben mit allen Feldern der oberen Kante des Spielfelds, im Fall der Abbildung hat jeder der vier Knoten also Grad 11).
   Nun färben wir v_l sowie alle Knoten, die von der linken Seite aus über einen dunkelgrauen Weg erreicht werden können, mit 1. Ebenso v_o und alle Knoten, die von oben über einen hellgrauen Weg erreicht werden können, mit 2. Alle anderen Knoten bekommen die Farbe 3.
   Überlegen Sie sich, dass dieser Graph eben ist und wir den Graph als Triangulierung eines Dreiecks mit den Ecken v_l, v_o und v_r auf (die Ecke v_u liegt also auf der Verbindung von v_l und v_r) auffassen können.
2. Zeigen Sie, dass die Färbung mit 1, 2, 3 eine Spernerfärbung ist, wenn das Spiel unentschieden ausgegangen ist (also alle Felder gefärbt, aber weder A noch B einen durchgehenden Pfad erreicht haben).

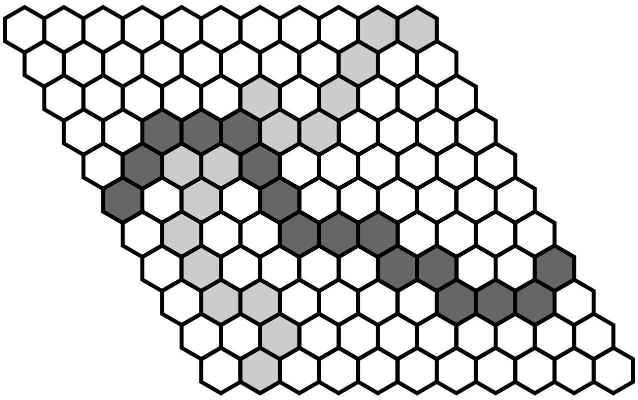

Abbildung 1: Ein Hex-Brett für $n = 11$. Dunkelgrau hat einen durchgehenden Pfad von links nach rechts erreicht.

3. Benutzen Sie das Sperner-Lemma um zu zeigen, dass es eine solche Färbung nicht geben kann.
4. Folgern Sie, dass es immer eine·n Sieger·in geben muss.

Aufgabe 11.4: Projektive Ebenen

Eine *endliche projektive Ebene der Ordnung* q ist ein Paar $\mathbb{P} := (P, L)$ mit $L \subseteq 2^P$ aus $q^2 + q + 1$ Punkten und $q^2 + q + 1$ Linien mit der Eigenschaft, dass

1. Je zwei Punkte definieren eine eindeutige Linie
2. Je zwei Linien haben genau einen Punkt gemeinsam
3. Jede Linie enthält $q + 1$ Punkte
4. Jeder Punkt ist in $q + 1$ Linien enthalten.

Zeigen Sie, dass es zu jeder Primzahlpotenz $q := p^k$ eine solche endliche projektive Ebene gibt.

Hinweis: Betrachten Sie Unterräume im Vektorraum $\mathbb{Z}_q^3$.

∗ Aufgabe 11.5: Gewinnstrategie für Hex

1. Zeigen Sie, dass im Spiel Hex der oder die Spieler·in, der oder die beginnt, eine Gewinnstrategie hat (also immer gewinnen kann).

   Hinweis: Nehmen Sie an, der/die zweite Spieler·in hätte eine solche Gewinnstrategie. Überlegen Sie sich, wie die/der erste Spieler·in diese Strategie ausnutzen kann.
2. Überlegen Sie sich, warum Hex auf einem Schachbrett ein eher langweiliges Spiel ist.

∗ Aufgabe 11.6: Chromatische Zahlen II

Sei G ein (nicht notwendig ebener) Graph mit m Kanten. Zeigen Sie, dass dann

$$\chi(G) \leq \frac{1}{2} + \sqrt{2m + \frac{1}{4}}\,.$$

Hinweis: Überlegen Sie sich, dass es zu jedem Paar von Farben eine Kante gibt, deren Endpunkte damit gefärbt sind.