10 Triangulierungen

→ Verbindung Kombinatorik und Topologie

Def $S \subseteq \mathbb{R}^n$ konvex

$$\Leftrightarrow \forall x,y \in S, \lambda \in [0,1] : \lambda x + (1-\lambda) y \in S$$

$V \subseteq \mathbb{R}^n$. Die konvexe Hülle $\operatorname{conv}(V)$ von V ist die kleinste konvexe Menge $S \subseteq \mathbb{R}^n$ mit $V \subseteq S$.

$$\Leftrightarrow \left\{ \sum_{v \in V} \lambda_v v \;\middle|\; \begin{array}{l} \lambda_v \geq 0, \sum \lambda_v = 1 \\ \lambda_v = 0 \text{ für fast alle } v \end{array} \right\}$$

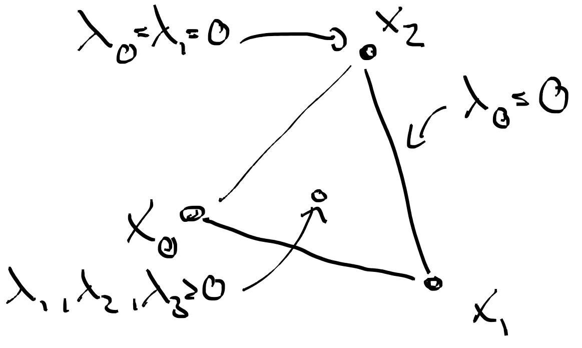
Äquivalenz ohne Beweis ⌋

Def: $S \subseteq \mathbb{R}^n$ ist k-dimensionales Simplex (k-Simplex)

$\Leftrightarrow$ S ist konvexe Hülle von $k+1$ affin unabhängigen Punkten $x_0, \dots, x_k$

$$\rightarrow S = \operatorname{conv}(\{x_0, \dots, x_k\})$$
$$= \left\{ \sum \lambda_i x_i \;\middle|\; \lambda_i \geq 0, \sum \lambda_i = 1 \right\}$$

Seiten von S: $\operatorname{conv}(x_i \mid i \in I)$ für ein $I \subseteq \{0, \dots, k\}$



$(\lambda_0, \dots, \lambda_k)$: Baryzentrische Koordinaten

Prop Seiten eines Simplex sind Simplizes ☒

Def Δ ist <u>Simplizialkomplex</u>
$:\Leftrightarrow$ Δ ist Menge von Simplizes (k-Zellen) mit
- F Seite von $S \in \Delta$ $\Rightarrow$ $F \in \Delta$
- Für $S_1, S_2 \in \Delta$ ist $S_1 \cap S_2$ Seite von beiden (ggf. leer)

$\dim \Delta := \max(\dim S \mid S \in \Delta)$

Δ ist <u>rein</u>: Jeder Simplex ist Seite eines Simplex der Dim $\dim \Delta$

Def $P \subseteq \mathbb{R}^n$. Δ ist Triangulierung von P:
$:\Leftrightarrow$ Δ ist Simplizialkomplex und
$$P = \bigcup_{S \in \Delta} S$$

Im Folgenden: S Simplex, Δ Triangulierung von S.
$x_0, \dots, x_n$ Ecken von S
V Ecken von Δ $\rightsquigarrow$ $x_i \in V$.
$\rightsquigarrow$ können $x \in S$ über baryzentrische Koordinaten $\lambda_0, \dots, \lambda_n$ bzgl $x_0, \dots, x_n$ darstellen.
$\rightarrow$ $\ell(x) := \{i \mid \lambda_i > 0\}$
Dann $x \in \operatorname{conv}(x_i \mid i \in \ell(x))$

<u>Def</u> $c: V \to \{0,\dots,n\}$ Spernerfärbung von Δ:

$\Leftrightarrow c(v) \in \ell(v)$ für alle $v \in V$

$\Leftrightarrow$ auf der Seite $\mathrm{conv}(x_i \mid i \in I)$ kommen nur Farben aus I vor.

Insbesondere: $c(x_i) = i$

<u>Def:</u> n-Zelle σ von Δ heißt <u>Regenbogenzelle</u>, wenn $c(u) \neq c(v)$ für alle Ecken u,v von σ, $u \neq v$.

<u>Satz</u> (Spernerlemma)
Jede Spernerfärbung von Δ hat eine Regenbogenzelle.

Bew: für $n \leq 2$, $n \geq 3$ ist Übung

$\to$ beweisen sogar: Anzahl der Regenbogenzellen ist ungerade.

<u>$n=1$:</u> $\bullet - \bullet - \bullet - \bullet - \bullet - \bullet - \bullet - \bullet$

$0 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 1$

S ist unterteiltes Segment

$\to$ starten mit 0, enden mit 1

$\Rightarrow$ ungerade Anzahl von Wechseln.

<u>$n=2$</u> $\to$ zählen Paare (S,e) für ein Dreieck $S \in \Delta$ und eine Kante $e \in S$, deren Endpunkte Farben 0 und 1 haben.

⇒ Setzen:

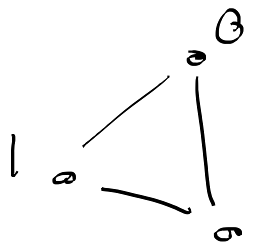
E_R := Anzahl Randkanten mit Farben 0 und 1.

E_I := — " — innerer Kanten — " —

R := Anzahl Regenbogenzellen.

N := Anzahl Zellen, die nicht in R sind, aber Kante mit Farben 0 und 1 haben.

⇒ Dreiecke in N haben genau zwei Kanten mit Farben 0, 1:



muss 0 oder 1 sein.

⇒ wir zählen $m :=$ Anzahl (S, e)

• über e: $m = E_B + 2 E_I$

• über S: $m = R + 2N$

nach Induktion ist E_B ungerade

⇒ R ungerade

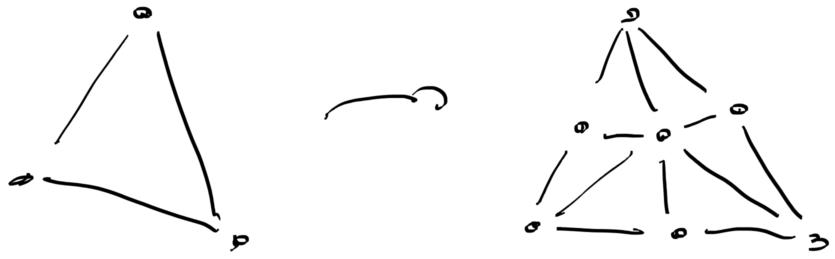
<u>Def</u> S Simplex

<u>Baryzentrische Unterteilung von S</u>

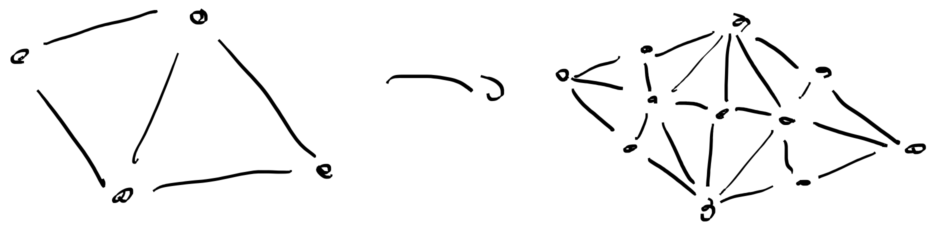
Triangulierung von S:

• Ecken in Schwerpunkt jeder Seite

• Kante zwischen Ecken zu inzidenten Seiten



für Simplizes, die sich in gemeinsamer Seite schneiden, ist die Unterteilung kompatibel:



⇝ können baryzentrische Unterteilungen eines Simplizialkomplexes definieren

→ insbesondere Triangulierungen

Wir wollen das Spernerlemma zum Beweis eines topologischen Resultats nutzen:

<u>Satz</u> (Brouwersches Fixpunktsatz)

$B^n := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq 1\}$ und $f: B^n \to B^n$ stetig

Dann gibt es $x \in B^n$ mit $f(x) = x$.