Diskrete Mathematik

Andreas Paffenholz

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WiSe 2022/23
08. Dezember 2022
Aufgabenblatt 8

Bis zum 18.12. läuft noch die Vorlesungsevaluation. Sie können dort Vorlesung und Tutorium bewerten. Sie erreichen die Evaluation über die Adresse

t1p.de/LVE

Für die Vorlesung brauchen Sie die Losung **LVV3M** und für das Tutorium **AYX6K**.

Aufgabe 8.1: Ramseygraphen

Sei $k \in \mathbb{Z}$ mit $k \geq 3$ gegeben. Wir definieren einen Graphen $G = (V, E)$ wie folgt: Die Knotenmenge ist die Menge aller dreielementigen Teilmengen von $[k]$, und wir fügen eine Kante zwischen den Knoten zu den Mengen A und B ein, wenn $|A \cap B| = 1$. Für $k = 5$ erhalten wir den *Petersen-Graph*.

1. Zeigen Sie, dass G keine stabile Menge der Größe $k + 1$ enthält.
2. Zeigen Sie, dass G keinen K_{k+1} enthält.

Hinweis: Betrachten Sie die Inzidenzvektoren und zeigen Sie, dass diese linear unabhängig sind.

Aufgabe 8.2: Ecken- und kantentransitive Graphen

Sei $G = (V, E)$ ein Graph (nicht notwendig planar). G heißt *eckentransitiv*, wenn es zu jedem Paar $u, v \in V$ einen Isomorphismus von G gibt, der u auf v abbildet. G ist *kantentransitiv*, wenn es zu je zwei Kanten $e, f \in E$ einen Isomorphismus gibt, der e auf f schickt.

1. Ist jeder eckentransitive Graph auch kantentransitiv?
2. Ist jeder kantentransitive Graph auch eckentransitiv?
3. Zeigen Sie, dass jeder kanten-, aber nicht eckentransitive Graph bipartit sein muss.

Aufgabe 8.3: Maximale 2-Abstand-Mengen

Aus der Vorlesung wissen wir, dass Mengen $A \subseteq \mathbb{R}^n$, so dass für alle $x, y \in \mathbb{R}^n$ der Abstand $\|x - y\| \in \{c, d\}$ für gegebene $c, d \in \mathbb{R}$ erfüllt. höchstens $\frac{1}{2}(n + 1)(n + 4)$ Elemente enthalten.

Konstruieren Sie solche Mengen mit mindestens $\frac{1}{2}n(n + 1)$ Elementen.

Hinweis: Betrachten Sie den Schnitt eines Würfels $C_m = [0, 1]^m \subseteq \mathbb{R}^m$ mit einer Hyperebene der Form $x_1 + \cdots + x_m = k$ für geeignete $m, k \in \mathbb{Z}_{>0}$.

Aufgabe 8.4: Bipartite Oddtown

Seien Mengen $A_1, \dots, A_m \subseteq [n]$ und $B_1, \dots, B_m \subseteq [n]$ gegeben, so dass $|A_i \cap B_i|$ ungerade ist für alle i und $|A_i \cap B_j|$ gerade ist für alle $i \neq j$.

1. Zeigen Sie, dass $m \leq n$.
2. Zeigen Sie, dass das auch stimmt, wenn wir gerade und ungerade vertauschen.
3. Zeigen Sie, dass schon die Bedingung, dass $|A_i \cap B_i|$ ungerade ist für alle i und $|A_i \cap B_j|$ gerade ist für alle $1 \leq i < j \leq m$, ausreicht, um $m \leq n$ zu folgern.

∗ Aufgabe 8.5: Dodekaeder

1. Zeigen Sie: Der Zykelindikator des Dodekaeders unter Drehungen der Seiten ist

$$Z(G, x_1, \dots, x_{12}) \;=\; \frac{1}{60}\left(x_1^{12} + 24x_1^2x_5^2 + 20x_3^4 + 15x_2^6\right) .$$

2. Folgern Sie, dass Sie die Seiten des Dodekaeders auf 4073375 Weisen mit fünf Farben färben können.
3. Zeigen Sie, dass Sie die Seiten auf 2163230 Weisen so färben können, dass fünf Seiten rot und die restlichen eine der Farben gelb, orange, grün und blau haben.

∗ Aufgabe 8.6: Ungerade Mengen mit ungeraden Schnitten

Sei $n \geq 1$ und $F \subseteq 2^{[n]}$ eine Mengenfamilie, bei der für alle $A, B \in F$, $A \neq B$ $|A|$ und $|A \cap B|$ ungerade sind. Sei $u(n)$ die Größe einer maximalen solchen Familie.

1. Sei $G \subseteq 2^{[n-1]}$ eine Familie von Mengen mit $|A|$ und $|A \cap B|$ gerade für alle $A, B \in G$ (Eventown). Zeigen Sie, dass Sie G zu einer Mengenfamilie in $2^{[n]}$ erweitern können, bei der alle Mengen und alle paarweisen Schnitte ungerade sind.
2. Folgern Sie, dass $u(n) \geq 2^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor}$ ist.
3. Die *symmetrische Differenz* zweier Mengen A und B ist $A \triangle B := A \setminus B \cup B \setminus A$. Zeigen Sie, dass für Mengen A, B und C mit $|A|, |B|, |C|$ ungerade die Mengen $A \triangle C$ und $(A \triangle C) \cap (B \triangle C)$ eine gerade Anzahl Elemente haben.
4. Zeigen Sie, dass aus $A \triangle C = B \triangle C$ schon $A = B$ folgt.
5. Sei nun $C \in F$. Wir definieren eine neue Mengenfamilie G über

$$G \;:=\; \{A \triangle C \mid A \in F\} .$$

   Zeigen Sie, dass $|G| = |F|$ und $|G| \leq 2^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$.
6. Sei nun n gerade. Zeigen Sie, dass dann für $A \in G$ die Menge $\overline{A} := [n] \setminus A$ nicht in G sein kann, $\overline{A}$ also nicht von der Form $B \triangle C$ für ein $B \in F$ sein kann.
7. Zeigen Sie, dass für n gerade auch in

$$\overline{G} \;:=\; \{A, [n] \setminus A \mid A \in G\}$$

   alle Mengen und alle paarweisen Schnitte eine gerade Anzahl Elemente haben.
8. Folgern Sie, dass für gerade n

$$2 \cdot |F| \;\leq 2^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} .$$

9. Folgern Sie, dass $u(n) = 2^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor}$, also $|F| \leq 2^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor}$.