8 Lineare Algebra in der Kombinatorik II

→ Methoden der linearen Algebra in der Kombinatorik

→ kombinatorische Objekte <-> Inzidenzvektoren

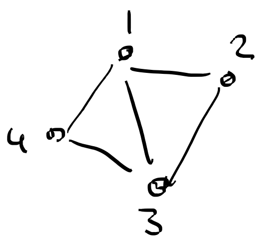
z.B. Mengen A <-> $\chi^A_i = \begin{cases} 1 & i \in A \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

Bsp $A = \{1,2,4\} \in [5]$,

$$\chi^A = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

oder Inzidenzmatrizen: G Graph

$A = (a_{ij})$ mit $a_{ij} = \begin{cases} 1 & (i,j) \in E \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$



$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

oder Ecken-Kanten-Inzidenz,

→ gerichtet / gewichtet.

Dann:

lineare (Un)Abhängigkeit, Dimension des Aufspanns, lineare/affine Relationen

Rang von Matrizen, ...

→ geeigneten Vektorraum betrachten

→ letztes Mal: $\mathbb{Z}_2^n$, $\mathbb{R}^n$

Damit: Odd-/Eventown-Sätze:

$\mathcal{F} \subseteq 2^{[n]}$, A ungerade/gerade für $A \in \mathcal{F}$
$A \cap B$ — " — für $A, B \in \mathcal{F}$, $A \neq B$

Dann:

$A \backslash A\cap B$	gerade	ungerade
gerade	$\lvert\mathcal{F}\rvert \leq 2^{\lfloor n/2 \rfloor}$	$\lvert\mathcal{F}\rvert \leq n$
ungerade	$\lvert\mathcal{F}\rvert \leq n$	$\lvert\mathcal{F}\rvert \leq 2^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor}$

Statt Parität: Größe des Schnitts fixieren:

Bsp $\lambda = 1$: $\{1\}, \{1, j\}$, $2 \leq j \leq n$, $\lambda = n-2$: $\binom{[n]}{n-1}$

<u>Satz</u> (Fisher-Ungleichung) $1 \leq \lambda \leq n$, $\mathcal{F} \in 2^{[n]}$
mit $|A \cap B| = \lambda$ für alle $A, B \in \mathcal{F}$, $A \neq B$

Dann $\quad |\mathcal{F}| \leq n \quad$ $\boxed{\Sigma}$

<u>Satz</u> P Menge von n Punkten im $\mathbb{R}^2$, nicht alle auf einer Geraden
Dann definieren die Punkte mindestens n Geraden

⌈ L: Menge der Geraden, die die Punkte definieren
$L_p := \{ \ell \in L : p \in \ell \}$
Dann: • $|L_p| \geq 2$, da sonst alle Punkte auf einer Geraden liegen

zwei Geraden schneiden sich in höchstens einem Punkt $\Rightarrow$ p ist durch L_p bestimmt

$\Rightarrow L_p \neq L_q$ für $p \neq q$

• $|L_p \cap L_q| = 1$

mit Fisher folgt $|P| \leq |L| \Rightarrow |L| \geq n$ $\square$

<u>Satz</u> (Sylvester-Gallai)

P Menge von n Punkten in $\mathbb{R}^2$, nicht alle auf einer Geraden.

Dann gibt es eine Gerade mit genau zwei Punkten

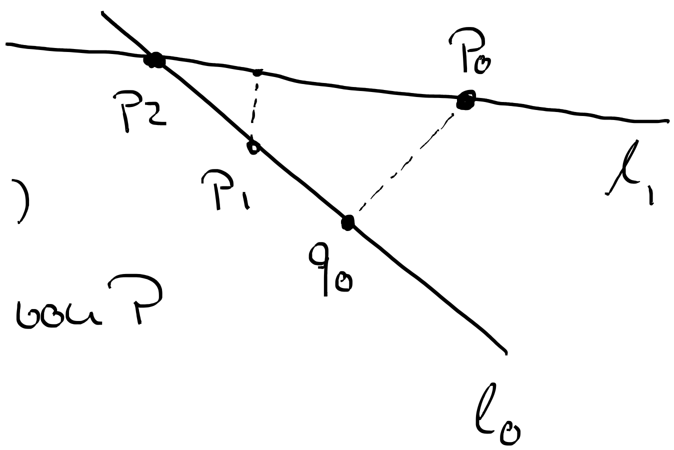
Beweis: L: Menge der Geraden, die P definiert

$\rightarrow$ betrachte Paare (p, ℓ) mit $p \in P$, $\ell \in L$, $p \notin L$

Sei (p_0, ℓ_0) so, dass $d(p_0, \ell_0)$ minimal

Sei q_0 der nächste Punkt zu p_0 auf L:

$d(q_0, p_0) = d(p_0, \ell_0)$



Ang. ℓ_0 enthält ≥ 3 Punkte von P

$\Rightarrow$ zwei Punkte $p_1, p_2 \in P \cap \ell_0$ liegen auf der gleichen Seite bzgl. q_0

$\rightarrow$ können $d(q_0, p_1) < d(q_0, p_2)$ annehmen

Sei $\ell_1 = (p_0, p_2)$

Dann $d(p_1, \ell_1) < d(p_0, \ell_0)$ ↯

$\Rightarrow$ ℓ_0 enthält nur zwei Punkte aus P. ⌟

Oft ist es nützlich, allgemeinere Vektorräume zu betrachten:

→ Funktionenräume

→ Polynome
- mit beschränktem Grad
- von Monomen aufgespannt

<u>Lemma</u> K Körper, M Menge, $f_1, \dots, f_n \in K^M$
$x_1, \dots, x_n \in M$ mit

$$f_i(x_j) = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Dann sind die $f_1, \dots, f_n$ lin. unabhängig

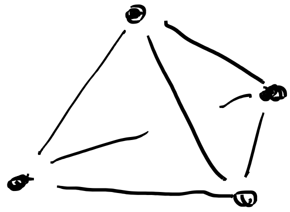
⌜ Ang. $f = \sum \lambda_i f_i \overset{!}{=} 0$

Dann $0 = f(x_j) = \sum \lambda_i f(x_j) = \lambda_j$

$\Rightarrow \lambda_j = 0$ ⌟

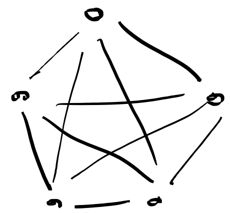
<u>Def:</u> $M \subseteq \mathbb{R}^n$ ist k-Abstandsmenge, wenn es $K \subseteq \mathbb{R}$ mit $|K| = k$ und $\|x - y\| \in K$ für alle $x, y \in M$ gibt.

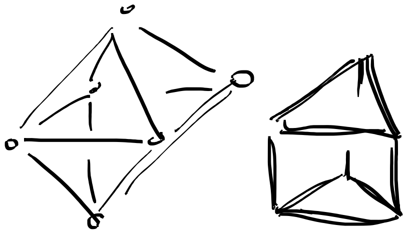
1-Abstand: M ist Teilmenge der Ecken eines (skalierten) Simplex



→ Wie sehen 2-Abstandsmengen aus?

$n=1$:

$n=2$: 

$n=3$: 

n	1	2	3	4	5
$\lvert M\rvert$	3	5	6	10	16

Satz $M \subseteq \mathbb{R}^n$, $c,d \in \mathbb{R}_{>0}$,
$\|x-y\| \in \{c,d\}$ für $x,y \in M$, $x \neq y$
Dann:
$$|M| \leq \frac{1}{2}(n+1)(n+4)$$

$M = \{m_1, \dots, m_k\}$

$$f_i(x) := \left(\|x-m_i\|^2 - c^2\right)\left(\|x-m_i\|^2 - d^2\right)$$

Dann:
$$f_i(m_j) = \begin{cases} c^2d^2 & i=j \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Die f_i sind linear unabhängig z.B. in $\mathbb{R}[x]$

$\rightarrow$ suche kleineren Unterraum:

$$f_i(x) = \Big(\sum_j (x_j - m_{ij})^2 - c^2\Big)\Big(\sum_j (x_j - d_{ij})^2 - d^2\Big)$$

$$= \Big(\sum_j x_j^2 - 2\sum_j x_j m_{ij} + \sum_j m_{ij}^2 - c^2\Big)\Big(\ldots\Big)$$

$\Rightarrow$ f_i hat Monome

$$\Big(\sum_j x_j^2\Big)^2, \ \Big(\sum x_j^2\Big)x_i, \ x_j x_i, \ x_j, \ 1$$

Mit $V := \mathrm{lin}\Big(\big(\sum_j x_j^2\big)^2, \big(\sum_j x_j^2\big)x_i, x_j x_i, x_j, 1\Big)$

folgt also $f_i \in V$ für alle i

Daher: $|M| = k \leq \dim V = 1 + n + \frac{1}{2}n(n+1) + n + 1$

$$= \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n + 2n + 2 = \frac{1}{2}(n+4)(n+1)$$

Bem: bessere Analyse liefert

$k \leq \frac{1}{2}(n+2)(n+)$ [Blokhuis '84]