7 Abzählen von Mustern II

→ Zählen von Konfigurationen unter Symmetrie

Bsp: (1) farbige Bälle im Kreis anordnen.

Farbmenge $R = [r]$, Positionen $N = [n]$

Gruppenwirkung $C_n \curvearrowright N$

suchen Anzahl Äquivalenzklassen auf der Menge R^N mit Relation

$$f' \sim f \iff f' = f \circ \pi(g)$$

für Permutationsdarstellung $\pi : G \to S_N$

(2) Seitenflächen des Würfels färben

G: Drehsymmetrien des Würfels

$G \curvearrowright S_6$ = Permutationen der Seiten

Farbmenge $R = [r]$

Abbildungen f: Seiten → R

(3) ternäre Bäume bis auf Permutation der Kinder

→ gesucht hier: Erzeugendenfunktion

$$T(x) = \sum_{n \geq 0} t_n x^n$$

auf jedem inneren Knoten wirkt eine S_3

Def Die Äquivalenzklassen einer Gruppenwirkung $G \curvearrowright X$ für eine Menge X mit Relation $x \sim y \Leftrightarrow \pi(g)(x) = y$ für ein g heißen Muster.

(in den Beispielen: $X = R^N$)

Def: $x \in X$, dann $M(x) := \{y \mid x \sim y\}$ Muster zu x

(in Bsp: $X = R^N$, $M(f) := \{f' \mid f' = f \circ g, g \in G\}$

Def: $x \in X$: $G_x := \{g \mid \pi(g)(x) = x\}$

Fixpunktgruppe zu $x \in X$

$g \in G$: $X_g := \{x \in X \mid \pi(g)(x) = x\}$

Fixpunktmenge zu $g \in G$

für $X = R^N$: $G_f = \{g \mid f = f \circ \pi(g)\}$

$X_g = \{f \mid f = f \circ \pi(g)\}$

Satz (Lemma von Burnside-Frobenius)

X Menge, $G \curvearrowright X$, μ Menge der Muster

Dann:

$$|\mu| = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |X_g|$$

B-3

Bsp (1) Bälle

$$X = R^{\omega} = \{w,s\}^{[4]},$$

$G = C_4 = \langle g \rangle$, g Drehung um 90°

$X_{id} = X$, $|X_{id}| = 16$

X_g ⇝ alle Farben gleich: $|X_g| = 2$

X_{g^3} ——— , ——— $|X_{g^3}| = 2$

X_{g^2}: $f(1) = f(3)$, $f(2) = f(4)$: $|X_{g^2}| = 4$

$$\Rightarrow |\mu| = \frac{1}{4}(16 + 2 + 2 + 4) = 24/4 = 6$$

(2) Würfel: id: $|X_{id}| = 64$

Anzahl von diesem Typ

Seitendrehung	90/270	$\lvert X_g\rvert = 8$	6
	180	$\lvert X_g\rvert = 16$	3
Kantendrehung		$\lvert X_g\rvert = 8$	6
Eckendrehung		$\lvert X_g\rvert = 4$	8

$$\Rightarrow |\mu| = \frac{1}{24}(64 + 48 + 48 + 48 + 32) = 10$$

Für vier Farben:

$|X_{id}| = 4^6 = 4096$, $|X_{90}| = |X_{270}| = 4^3 = 64$

$|X_{180}| = 256$ $|X_K| = 64$ $|X_E| = 16$

$$\Rightarrow |\mu| = \frac{1}{24}(4096 + 6\cdot 64 + 3\cdot 256 + 6\cdot 64 + 16\cdot 8) = 240$$

Nun für $X = R^N$

$\rightarrow$ brauchen Fixpunktmengen

$$(R^N)_g = \{ f \in R^N \mid f = f \circ \pi(g) \}$$

wir setzen: $\pi_g := \pi(g)$

und betrachten Zykelschreibweise

$$\pi_g = (a, \pi_g a, \pi_g^2 a, \dots)(b, \pi_g b, \pi_g^2 b, \dots)(c, \dots) \dots$$

Nun: $f = f \circ \pi_g$ für $f \in (R^N)_g$

und daher $f(a) = f(\pi_g a) = f(\pi_g^2 a) = \dots$

$\Rightarrow$ f ist konstant auf den Zykeln.

wir setzen für $\sigma \in S_N$:

$b_i(\sigma) :=$ Anzahl der Zykel der Länge i in σ

Dann: $$n = \sum i b_i(\sigma)$$

<u>Def</u> Der <u>Zykelindikator</u> von $G \curvearrowright R^N$ ist

$$Z(G, y_1, \dots, y_n) := \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} y_1^{b_1(\pi_g)} \cdots y_n^{b_n(\pi_g)}$$

<u>Bsp</u> (1) Bälle im Kreis: $C_4 \curvearrowright N$

$$Z(C_4, y_1, \dots, y_n) = \frac{1}{4}\left(y_1^4 + y_2^2 + 2y_4\right)$$

B-5

(2) Würfel mit s/w-Seitenflächen:

id: y_1^6

Seitenachsen: $3(y_1^2 y_2^2 + 2y_1^2 y_4)$

Kantenachsen: $6y_2^3$

Eckenachsen: $8y_3^2$

Damit:

$$Z(G, y_1, \ldots, y_6) = \frac{1}{24}\left(y_1^6 + 3y_1^2 y_2^2 + 6y_1^2 y_4 + 6y_2^3 + 8y_3^2\right)$$

Nun wollen wir Muster nach Häufigkeit der Farben zählen, z.B. genau zwei schwarze Seiten beim Würfel

Dafür: weise $r \in R$ Variable x_r zu

Def: <u>Gewicht</u> von f:

$$w(f) := \prod_{a \in N} x_{f(a)}$$

<u>Prop</u> $f \sim f' \Rightarrow w(f) = w(f')$

<u>Def</u> <u>Gewicht</u> eines Musters $w(\Pi) := w(f)$ für ein $f \in \Pi$

$\rightarrow$ wir wollen nun

$$w(R^N, G) := \sum_{\Pi \in \mu} w(\Pi)$$

bestimmen.

Bsp: (1): $w(R^N, G) = x_w^4 + x_w^3 s + 2x_w^2 x_s^2 + x_w x_s^3 + x_s^4$

(2): $w(R^N, G) = x_w^6 + x_w^5 x_s + 2x_w^4 x_s^2 + 2x_w^3 x_s^3 + 2x_w^2 x_s^4 + x_w x_s^5 + x_s^6$

Damit können wir zeigen:

<u>Satz</u> (Polya) N, R Mengen, $n = |N|$, $r = |R|$

G Gruppe mit $G \curvearrowright N$

Dann

$$w(R^N; G) = \sum_{M \in \mu} w(M) = Z\Big(G, \sum_{j \in R} x_j, \sum_{j \in R} x_j^2, \dots, \sum_{j \in R} x_j^n\Big)$$

D.h.: man erhält $w(R^N, G)$ durch Ersetzen

$$y_k \longmapsto \sum_{j \in R} x_j^k \quad \text{in } Z(G, y_1, \dots, y_n)$$

Sei M Muster von R^N unter G

$\Rightarrow G \curvearrowright M$ mit genau einem Muster (M selbst)

$$\Rightarrow \quad 1 = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |M_g| \qquad \text{für } M_g := \{ f \in M \mid f = f \circ \pi_g \}$$

Burnside-Frobenius

Nun haben alle $f \in M$ gleiches Gewicht

$$\Rightarrow \quad w(M) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |M_g| \, w(M) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \sum_{f \in M_g} w(f)$$

und Summation über alle Muster ergibt

$$w(R^N, G) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \sum_{\substack{f \in R^N \\ f = f \circ \pi_g}} w(f)$$

Nun: $f \circ \pi_g = f \iff f$ konstant auf Zykeln von π_g

$\Rightarrow$ wenn π_g $b_i(g)$ Zykel der Länge i hat

gibt es b_1 Bilder a_{1_j} von Zykeln der Länge 1

b_2 Bilder a_{2_j} —— " —— 2

$\vdots$

und daher

$$w(f) = \left(\prod_{j=1}^{b_1} x_{a_{1_j}}\right)\left(\prod_{j=1}^{b_2} x_{a_{2_j}}\right) \cdots \left(\prod_{j=1}^{n} x_{a_{n_j}}\right)$$

Nun kommen in R^D alle Abbildungen vor, die auf den Zykeln konstant sind

$$\Rightarrow \sum_{\substack{f \in R^D \\ f \circ \pi_g = f}} w(f) = \left(\sum_{j \in R} x_j\right)^{b_1} \cdots \left(\sum_{j \in R} x_j^n\right)^{b_n}$$

$$\Rightarrow w(R^D, G) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \left[\left(\sum_{j \in R} x_j\right)^{b_1(\pi_g)} \cdots \left(\sum_{j \in R} x_n\right)^{b_n(\pi_g)}\right]$$

$$= Z\left(G, \sum_{j \in R} x_j, \ldots, \sum_{j \in R} x_j^n\right)$$

$\lrcorner$

Korollar $|\mu| = Z(G, r, \ldots, r)$

$\ulcorner$ Setze $x_j = 1 \ \forall j \Rightarrow \sum x_j^k = r \ \forall k$ $\lrcorner$