Diskrete Mathematik

Andreas Paffenholz

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WiSe 2022/23
24. November 2022
Aufgabenblatt 6

Aufgabe 6.1: Satz von Turán

In Aufgabe 5.1 haben Sie gezeigt, dass es einen k-partiten Graphen $T_{n,k}$, den Turán-Graphen, mit n Knoten gibt, der $(1-\frac{1}{k})\frac{n^2-r^2}{2}+\binom{r}{2}$ Kanten hat. $T_{n,k}$ enthält nach Konstruktion keinen vollständigen Graphen K_{k+1} mit $k+1$ Knoten als induzierten Teilgraphen.

Sei nun $G=(V,E)$ ein Graph mit n Knoten und der maximalen Anzahl $e=|E|$ Kanten (unter allen Graphen mit n Knoten), der keinen K_{k+1} als Teilgraphen enthält.

1. Zeigen Sie, dass es keine drei verschiedenen Knoten $u,v,w\in V$ gibt, so dass $\deg(u)<\deg(v)$ und $\{v,w\}\in E$, aber $\{u,v\},\{u,w\}\notin E$.

   Hinweis: Nehmen Sie an, es gibt ein solches Tripel, ersetzen Sie die Nachbarschaft von u durch die von v und zeigen Sie, dass der neue Graph keinen K_{k+1} enthält, aber mehr Kanten hat.
2. Folgern Sie, dass es auch kein solches Tripel gibt mit $\deg(u)<\deg(w)$.
3. Zeigen Sie, dass es auch kein solches Tripel gibt, bei dem $\deg(u)\geq\deg(v),deg(w)$ ist.
4. Folgern Sie, dass die Relation $u\sim v$, die zwei Knoten u und v als äquivalent ansieht, wenn sie nicht durch eine Kante verbunden sind, eine Äquivalenzrelation ist.
5. Zeigen Sie, dass dann G isomorph zu einem k-partiten Graphen ist.

Aufgabe 6.2: Satz von Hall

1. Wir betrachten bipartite Graphen $G=(A\cup B,E)$ mit nichtleeren disjunkten Knotenmengen A und B sowie der Kantenmenge E mit $|A\cap e|=|B\cap e|=1$ für alle $e\in E$. Mit $N(S)\subseteq B$ bezeichnen wir die Nachbarschaft einer Menge von Knoten $S\subseteq A$. Der Satz von Hall sagt, dass G genau dann ein Matching der Größe $|A|$ enthält, wenn $|N(S)|\geq|S|$ ist für alle $S\subseteq A$.
   Beweisen Sie den Satz von Hall mit Hilfe des Satzes von Dilworth.

   Hinweis: Fassen Sie den Graph geeignet als Hasse-Diagramm auf und wählen Sie eine geeignete Antikette.
2. (!) Ein *System unterschiedlicher Repräsentanten* einer Familie F von m Mengen $S_1,\dots,S_m$ ist ein Tupel $x=(x_1,\dots,x_m)$ paarweise verschiedener Elemente, so dass $x_i\in S_i$. Beweisen Sie folgende Version des Satzes von Hall: Wenn für alle $I\subseteq[m]$ gilt, dass

$$\left|\bigcup_{i\in I}S_i\right| \;\geq\; |I|\,,$$

   dann besitzt die Familie F ein System unterschiedlicher Repräsentanten.

Aufgabe 6.3: k-Mengen mit großem Schnitt

Für $n \leq 2k$ sei F eine Familie von k-Teilmengen von $[n]$, so dass $A \cup B \neq [n]$ für alle $A, B \in F$. Zeigen Sie

$$|F| \;\leq\; \left(1 - \frac{k}{n}\right)\binom{n}{k}.$$

Hinweis: Wenden Sie den Satz von Erdös-Ko-Rado auf die Komplemente der $A \in F$ an.

Aufgabe 6.4: Würfelkanten und -Ecken

Sei G die Symmetriegruppe des Würfels.

1. Bestimmn Sie den Zykelindikator, wenn N die Menge der Kanten bzw. Ecken ist. Wie viele Muster mit 2 oder 3 Farben gibt es jeweils?
2. Wie viele Muster erhalten wir, wenn wir die zwölf Kanten des Würfels mit zwölf verschiedenen Farben färben?
3. Wie viele Färbungen der Seiten, Kanten oder Ecken des Würfels gibt es, in denen schwarz und weiß gleich oft auftreten?

$\ast$ Aufgabe 6.5: Schnittfamilien erweitern

Zeigen Sie, dass jede Schnittfamilie F in $[n]$ in einer Schnittfamilie G in $[n]$ der Größe $|G| = 2^{n-1}$ enthalten ist.

Hinweis: Betrachten Sie beliebige A und $[n] \setminus A$.

$\ast$ Aufgabe 6.6: Nochmal Teilfolgen

Sei eine Folge $A := (a_i)_{i=1}^n$ eine Folge mit $n > srt$ für natürliche Zahlen $s, r, t \in \mathbb{Z}_{>0}$.

Zeigen Sie, dass A eine strikt aufsteigende Teilfolge der Länge s enthält, oder eine strikt fallende Teilfolge der Länge r, oder eine konstante Teilfolge der Länge t.