Diskrete Mathematik

Andreas Paffenholz

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WiSe 2022/23
17. November 2022
Aufgabenblatt 5

Aufgabe 5.1: Multipartite Graphen

Ein Graph $G = (V, E)$ heißt *k-partit*, wenn wir V als Vereinigung $V = A_1 \cup \ldots \cup A_k$ disjunkter nichtleerer Mengen $A_1, \ldots, A_k$ schreiben können, so dass $|e \cap A_i| \leq 1$ für alle $e \in E$ und $1 \leq i \leq k$ (alle Kanten verlaufen zwischen verschiedenen Mengen der Partition).

$G = K(A_1, \ldots, A_k)$ heißt *vollständiger k-partiter Graph auf* $V = A_1 \cup \ldots \cup A_k$, wenn $\{u, v\} \in E$ für alle $u \in A_i$, $v \in A_j$ und $1 \leq i < j \leq k$. Wir setzen $n := |V|$ und $a_i := |A_i|$.

1. Zu $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ betrachten wir k-Tupel von Zahlen $(a_1, \ldots, a_k)$ mit $a_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ für $1 \leq i \leq k$ und $\sum_{i=1}^{k} a_i = n$. Zeigen Sie, dass das Produkt $a_1 a_2 \cdots a_k$ genau dann maximal ist, wenn $|a_i - a_j| \leq 1$ für alle $1 \leq i \leq j \leq k$.
2. Zeigen Sie, dass für festes $n = \sum_{i=1}^{k} a_i$ die Anzahl $e := |E|$ der Kanten von $K(A_1, \ldots, A_k)$ genau dann maximal ist, wenn $|a_i - a_j| \leq 1$.
   Dieser Graph ist (bis auf Umbenennung der Mengen A_i) eindeutig und wird mit $T_{n,k}$ bezeichnet.

Aufgabe 5.2: Bernoullizahlen

Die Bernoullizahlen B_n, $n \geq 0$, sind durch die Rekursion

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k} B_k = 0$$

und $B_0 = 1$ definiert. Es ergibt sich also $B_0 = 1$, $B_1 = -\frac{1}{2}$, $B_2 = \frac{1}{6}$, $B_3 = 0$.

Zeigen Sie, dass die exponentielle Erzeugendenfunktion $B(x)$ der Bernoullizahlen

$$B(x) = \frac{x}{e^x - 1}$$

ist.

Hinweis: Die Aufteilung $x^n = x^k x^{n-k}$ und Summenvertauschung könnte nützlich sein.

Bemerkung: Die Bernoullizahlen treten unter anderem in einigen Potenzreihen trigonometrischer Funktionen auf, z.B.

$$\tan(x) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{2^{2k}(1 - 2^{2k})}{(2k)!} B_{2k} x^{2k-1}$$

Aufgabe 5.3: Hamiltonsche Graphen

Ein *Kreis* in einem Graphen $G = (V, E)$ ist eine Folge $v_0, v_1, v_2, \ldots, v_k$ von Knoten, so dass $v_0 = v_k$, $v_i \neq v_j$ für alle anderen Paare i, j mit $i \neq j$ und $\{v_i, v_{i+1}\} \in E$ für $0 \leq i < k$. Anschaulich heißt das, wir können von v_0 entlang Kanten über $v_1, v_2, \ldots$ gehen und zu v_0 zurückkehren, ohne einen Knoten ausser $v_0 = v_k$ mehrfach zu passieren. Ein *Hamiltonkreis* ist ein Kreis, der alle Knoten enthält.

Zeigen Sie, dass ein Graph, für den jedes Paar von Knoten u, v, die nicht benachbart sind (also $\{u, v\} \notin E$)

$$\deg(u) \;+\; \deg(v) \;\geq\; n$$

erfüllt, einen Hamiltonkreis haben muss.

Hinweis: Ein Ansatz ist es, stattdessen zu zeigen, dass ein Graph G ohne Hamiltonkreis die Bedingung nicht erfüllen kann. Fügen Sie dafür solange Kanten zu G hinzu, wie Sie damit keinen Hamiltonkreis erzeugen, und betrachten Sie dann lange Pfade und die Nachbarschaft geeigneter Knoten.

Aufgabe 5.4: Mengenfamilien

1. Sei F eine k-uniforme Familien von Mengen mit der Eigenschaft, dass $A \cap B \not\subset C$ für alle Tripel verschiedener $A, B, C \in F$. Zeigen Sie, dass

$$|F| \;\leq\; 1 + \binom{k}{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor}.$$

Hinweis: Betrachten Sie die Mengen $A \cap B$ für ein festes $B \in F$ und alle $B \neq A \in F$.

2. Sei F eine Familien von Teilmengen von $[n]$ mit der Eigenschaft, dass für $A \subseteq B \subseteq C$ und $A, C \in F$ auch $B \in F$. Zeigen Sie, dass

$$\left| \sum_{A \in F} (-1)^{|A|} \right| \;\leq\; \binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}.$$

∗ Aufgabe 5.5: Partitonen

Wir betrachten noch einmal die Partitionsfunktionen $p_d(n)$ und $p_u(n)$, die angeben, auf wieviele Weisen wir n als Summe verschiedener positiver Zahlen bzw. als Summe nur ungerader Zahlen schreiben können.

1. Bestimmen Sie die Erzeugendenfunktionen und benutzen Sie diese, um zu zeigen, dass $p_d(n) = p_u(n)$.
2. Zeigen Sie, dass die Anzahl der Partitionen, bei denen kein Summand durch 3 teilbar ist, gleich der Anzahl Partitionen ist, bei denen kein Summand mehr als zweimal vorkommt.
3. Verallgemeinern Sie auf d statt 3.

∗ Aufgabe 5.6: Satz von Erdős-Szekeres

Der Satz von Satz von Erdős-Szekeres sagt aus, dass es in jedem n-Tupel reeller Zahlen $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ mit $n \geq rs + 1$ eine aufsteigende arithmetische Progression der Länge $r + 1$ oder eine absteigende arithmetische Progression der Länge $s + 1$ gibt (wir haben den Satz in der Vorlesung für $r, s = n$ bewiesen).

Beweisen Sie diesen Satz erneut, diesmal unter Verwendung des Satzes von Dilworth.

Hinweis: Definieren Sie dazu eine geeignete partielle Ordnung auf dem Tupel, die sowohl den Wert als auch die Indizes zweier Elemente des Tupels berücksichtigt.