2. Abzählende Kombinatorik

→ haben schon einige Zählaufgaben gelöst

- k mal einen Ball aus n auswählen
  - mit Zurücklegen: n^k
  - ohne Zurücklegen: $n^{\underline{k}} := n(n-1)\cdots(n-k+1)$
- k Bälle aus n auswählen, ohne Reihenfolge

  $$\binom{n}{k}$$

formal: mit Abbildungen

$$f: K \to N, \quad |K| = k, \quad |N| = n$$

dann:

- Elemente in K, N unterscheidbar:
  - es gibt n^k Abbildungen f
  - es gibt $n^{\underline{k}}$ injektive Abbildungen f
  - es gibt

    $$T(k,n) = \sum_{j=1}^{n} \binom{n}{j} (-1)^j (n-j)^2$$

    surjektive Abbildungen

2

- Elemente in K nicht unterscheidbar
  - es gibt $\binom{n}{k}$ injektive Abbildungen f

→ es gibt weitere mögliche Fälle

K, N unterscheidbar / nicht unterscheidbar

f beliebig, injektiv, surjektiv

→ insgesamt 12 Fälle

→ 4 davon haben wir schon

- zwei weitere sind noch leicht:

f injektiv, N nicht unterscheidbar

→ K darf nicht zu groß sein

es 1 Abb., wenn $n \geq k$, keine sonst

- zwei weitere Fälle sind leicht:

→ f injektiv, N nicht unterscheidbar

K unterscheidbar oder nicht

dann: K darf nicht zu groß sein

es gibt 1 Abbildung, wenn $|K| \leq |N|$

und keine sonst.

bis jetzt:

K	N	f beliebig	injektiv	surjektiv
u	u	✓	✓	✓
nu	u	(1)	✓	(2)
u	nu	(6)	✓	(5)
nu	nu	(3)	✓	(4)

→ gehen sechs fehlende Fälle durch:

(1) K nu, N u:

$\hat{=}$ k Bälle auf n nummerierte Kisten verteilen

$\hat{=}$ k mal aus Kiste mit n nummerierten Bällen ziehen und zurücklegen, ohne Reihenfolge

→ sei $f(k,n)$ gesuchte Funktion, dann

$$f(k,n) = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Kiste } n \text{ bleibt leer}}}{f(k,n-1)} + \underset{\substack{\uparrow \\ \text{ein Ball in } n\text{, dann } k-1 \text{ verteilen.}}}{f(k-1,n)}$$

$f(0,n) = 0 \;\; \forall n \geq 0$, $\;\; f(k,0) = 1$ für $k \geq 1$

4

⌈ können raten: Rekursion erinnert an

$$\binom{a}{b} = \binom{a-1}{b} + \binom{a-1}{b-1}$$

und $a = k+n-1$, $b = n-1$ erfüllt Anfangsbed. ⌋

⌈ kombinatorische Überlegung:

lege Bälle hintereinander, ziehe Strich, wenn neue Kiste beginnt:

0 0 | 0 0 0 | 0 || 0 0 ||| 0 ||

→ k Bälle, $n-1$ Striche auf $n+k-1$ Positionen

→ Wahl der Plätze für | bestimmt ganze Verteilung

⇒ $\# f \overset{!}{=} \#$ Möglichkeiten, $n-1$ Striche auf $n+k-1$ Plätze zu verteilen

$$\Rightarrow f(k,n) = \binom{n+k-1}{n-1} = \binom{n+k-1}{k}$$

(2) f zusätzlich surjektiv:

→ eine Kugel in jede Box

→ dann verteilen wie im vorangegangenen Fall

$$\Rightarrow \binom{n+(k-n)-1}{n-1} = \binom{k-1}{n-1} \text{ Möglichkeiten}$$